Corrigé de l'épreuve mathématiques A XLSR - Filière MP-MPI 2023.

PAR ETTOUSY BADR, SABIR ILYASS.

Si vous trouvez des erreurs de français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-nous un mail à **ilyasssabir7@gmail.com**
N.B: il s'agit d'un corrigé non officiel.

1 I Préliminaires

1.a Montrons que $\mathbb{H}$ est un sous-$\mathbb{R}$ algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ stable par $Z \longmapsto Z^*$.
On a $E = Z(1,0) \in \mathbb{H}$, et pour tout $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$Z(z_1,z_2) + \lambda Z(z_3,z_4) = \begin{pmatrix} z_1 + \lambda z_3 & -(\overline{z_2 + \lambda z_4}) \\ z_2 + \lambda z_4 & \overline{z_1 + \lambda z_3} \end{pmatrix} = Z(z_1 + \lambda z_3, z_2 + \lambda z_4) \in \mathbb{H}.$$

Et

$$Z(z_1,z_2) \times Z(z_3,z_4) = \begin{pmatrix} z_1 z_3 - \bar{z}_2 z_4 & -(\overline{z_2 z_3 + \bar{z}_1 z_4}) \\ z_2 z_3 + \bar{z}_1 z_4 & \overline{z_1 z_3 - \bar{z}_2 z_4} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Donc $\mathbb{H}$ est un sous $\mathbb{R}$ algèbre de $M_2(\mathbb{C})$.
Et on a

$$Z(z_1,z_2)^* = \begin{pmatrix} \bar{z_1} & \bar{z}_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} = Z(\bar{z_1}, -z_2) \in \mathbb{H}.$$

D'où $\mathbb{H}$ est stable par $Z \longmapsto Z^*$.

1.b Soit $Z \in \mathbb{H}$, notons $Z = Z(z_1,z_2)$ où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
On a

$$\begin{aligned} Z(z_1,z_2)Z(z_1,z_2)^* &= \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{z_1} & \bar{z}_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |z_1|^2 + |z_2|^2 & 0 \\ 0 & |z_1|^2 + |z_2|^2 \end{pmatrix} \\ &= (|z_1|^2 + |z_2|^2)E \end{aligned}$$

Et on a

$$Z^*Z = Z(\bar{z_1}, -z_2)Z(\bar{z_1}, -z_2)^* = (|\bar{z_1}|^2 + |-z_2|^2)E = (|z_1|^2 + |z_2|^2)E.$$

Si $Z(z_1,z_2)$ non nul, on a $(z_1,z_2) \neq -(0,0)$, en particulier $|z_1|^2 + |z_2|^2 > 0$, en paticulier $Z.Z^*$ est inversible.

1.c Soit $Z(z_1,z_2) \in \mathbb{H}$, avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Si $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Z = a.E$
On a pour tout $Z' \in \mathbb{H}$, on a

$$Z.Z' = aZ' = Z'.Z$$

Réciproquement, si pour tout $Z' \in \mathbb{H}$, on a $Z.Z' = Z'.Z$, alors
pour tout $z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, on a

$$Z(z_1 z_3 - \bar{z}_2 z_4, z_2 z_3 + \bar{z}_1 z_4) = Z(z_3 z_1 - \bar{z}_4 z_2, z_4 z_1 + \bar{z}_3 z_2)$$

Donc

$$\begin{cases} z_1z_3-\bar{z}_2z_4=z_3z_1-\bar{z}_4z_2 \\ z_2z_3+\bar{z}_1z_4=z_4z_1+\bar{z}_3z_2 \end{cases}$$

Donc pour tout $z_4\in\mathbb{R}$, on a $z_4(\bar{z}_2-z_2)=0$, et pour tout $z_4\in i\mathbb{R}$, on a $z_4(\bar{z}_2+z_2)=0$ en particulier $z_2\in\mathbb{R}\cap i\mathbb{R}=\{0\}$, donc $z_2=0$.
Et $z_4(z_1-\bar{z}_1)=0$, et ça pour tout $z_4\in\mathbb{C}$, donc $z_1\in\mathbb{R}$.
D'où $Z=z_1.E\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$.
D'où l'équivalence.

2.a On a pour tout $Z=(z_1,z_2), Z'=(z_3,z_4)\in\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} N(ZZ') &= N(Z(z_1z_3-\bar{z}_2z_4, z_2z_3+\bar{z}_1z_4)) \\ &= |z_1z_3-\bar{z}_2z_4|^2+|z_2z_3+\bar{z}_1z_4|^2 \\ &= |z_1z_3|^2-2z_1z_3\overline{\bar{z}_2z_4}+|\bar{z}_2z_4|^2+|z_2z_3|^2+2z_2z_3\overline{\bar{z}_1z_4}+|\bar{z}_1z_4|^2 \\ &= |z_1|^2|z_3|^2+|z_2|^2|z_4|^2+|z_2|^2|z_3|^2+|z_1|^2|z_4|^2 \\ &= (|z_1|^2+|z_2|^2)(|z_3|^2+|z_4|^2) \\ &= N(Z)N(Z') \end{aligned}$$

2.b Montrons que S est un sous groupe de $\mathbb{H}^\times$
On a $N(E)=1$ donc $E\in S$
Soient $Z,Z'\in S$, on a $Z,Z'\in\mathbb{H}$ tel que $N(Z)=N(Z')=1$, d'après la question 1.b, on a Z et Z' sont inversibles.
Or d'après la question précédente, on a $N({Z'}^{-1})=N(Z').N({Z'}^{-1})=N(Z'{Z'}^{-1})=N(E)=1$.
Donc

$$N(Z.{Z'}^{-1})=N(Z)N({Z'}^{-1})=1$$

Ainsi $Z.{Z'}^{-1}\in S$. ainsi S est un sous groupe de $\mathbb{H}^\times$, et on a pour tout $Z=(z_1,z_2)\in\mathbb{H}^\times$.
On a $N(Z)>0$ et

$$N\left(\frac{1}{\sqrt{N(Z)}}Z\right)=\left|\frac{z_1}{\sqrt{N(Z)}}\right|^2+\left|\frac{z_2}{\sqrt{N(Z)}}\right|^2=\frac{1}{N(Z)}N(Z)=1.$$

Donc $\frac{1}{\sqrt{N(Z)}}Z\in S$.

3.a Soient $x,y,z,t\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} N(xE+yI+zJ+tK) &= N\left(\begin{pmatrix} x+iy & z-it \\ -z+it & x-iy \end{pmatrix}\right) \\ &= |x+iy|^2+|-z+it|^2 \\ &= x^2+y^2+z^2+t^2 \end{aligned}$$

3.b Soit $U\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ on a alors l'existence de $x,y,z\in\mathbb{R}$ tel que $U=xI+yJ+zK$, on a alors

$$U^2=-(x^2+y^2+z^2)E=-N(U).E$$

On a donc $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\subset\{U\in\mathbb{H}|U^2\in]-\infty,0]E\}$.
Soit $U\in\mathbb{H}$ tel que $U^2\in]-\infty,0]E$, montrons que $U\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
On a l'existence de $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ tel que $U=xE+yI+zJ+tK$.
On a

$$U^2=(x^2-y^2-z^2-t^2)E+2xyI+2xzJ+2xtK$$

On a $U^2\in]-\infty,0]E$, donc $xy=xz=xt=0$. et $x^2\leqslant y^2+z^2+t^2$.
Si $x\neq0$, on a alors $y=z=t=0$, par suite $x^2\leqslant0$, donc $x=0$, absurde.
D'où $x=0$. par suite $U=yI+zJ+tK\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

4. On a $Z\in\mathbb{H}\rightarrow\sqrt{N(Z)}$ est une norme sur $\mathbb{H}$ assciée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$

On a S est le cercle unité centrée en 0 de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{H},\sqrt{N})$.

Donc S est un fermé de $\mathbb{H}$, et on a $\psi(\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|x^2+y^2+z^2+t^2=1\})=S$

Avec $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|x^2+y^2+z^2+t^2=1\}$ est la boule centrée unitée de $\mathbb{R}^4$, donc elle est connexe par arc.

Or ψ est 1-lipschitzienne, en particulier qu'elle est continue.

Ainsi S est connexe par arc comme étant l'image directe par une application continue d'une partie connexe par arc.

5 Soient $U,V\in H^{\text{im}}$.

5.a Montrons que U et V sont orthogonaux si et seulement si $UV+VU=0$.

Supposons que U et V sont orthogonaux

On a

$$UV+VU=(U+V)^2-U^2-V^2=-(N(U+V)-N(U)-N(V))E$$

Donc U et V sont orthogonaux si et seulement si $N(U+V)=N(U)+N(V)$ si et seulement si $UV+VU=0$

Dans ce cas, on a $(UV)^2=-UV^2U=N(V)U^2=-N(U)N(V)E$, avec $-N(U)N(V)\leqslant 0$.

donc $UV\in H^{\text{im}}$.

Notons $U=x_1I+y_1J+z_1K$ et $V=x_2I+y_2J+z_2K$ avec $x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\in\mathbb{R}$.

Donc $UV=(y_1z_2-z_1y_2)I+(z_1x_2-x_1z_2)J+(x_1y_2-y_1x_2)K$. (car U et V sont orthogonaux)

Donc la matrice de (U,V,UV) dans la base (I,J,K) est

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1z_2-z_1y_2 \\ y_1 & y_2 & z_1x_2-x_1z_2 \\ z_1 & z_2 & x_1y_2-y_1x_2 \end{pmatrix}$$

Avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1z_2-z_1y_2 \\ y_1z_2-z_1y_2 \\ x_1y_2-y_1x_2 \end{pmatrix}$, donc le déterminant de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1z_2-z_1y_2 \\ y_1 & y_2 & z_1x_2-x_1z_2 \\ z_1 & z_2 & x_1y_2-y_1x_2 \end{pmatrix}$ est positif ou nul.

5.b Supposons que (U,V) est orthonormale dans $\mathbb{H}^{\text{im}}$. montrons que (U,V,UV) est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\text{im}}$.

Et on a $N(U+V)=N(U)+N(V)$ et $N(U)=N(V)=1$

$$\begin{aligned}\langle U,UV\rangle &= \frac{1}{2}(N(U(U+V))-N(UV)-N(U)) \\ &= \frac{1}{2}[N(U)(N(U+V)-N(V))-N(U)] \\ &= \frac{1}{2}[N(U)(N(U))-N(U)] \\ &= \frac{1}{2}[1-1] \\ &= 0\end{aligned}$$

Par symétrie $\langle V,UV\rangle=0$, et $N(UV)=N(U)N(V)=1$.

Ainsi (U,V,UV) est orthonormée, et d'après la question précédente, cette famille de déterminant positif ou nul, puisqu'elle est orthogonale alors elle est libre, en particulier de dérerminant non nul, donc de déterminant strictement positif.

En conclusion (U,V,UV) est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\text{im}}$.

2 II Automorphisemes de $\mathbb{H}$ et rotations.

6. Montrons que α est un morphisme de groupes

Soient $(u,v),(u',v')\in S\times S$, on a pour tout $Z\in\mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\alpha((u,v)\times(u',v'))(Z) &= \alpha(uu',vv')(Z)\\ &= uu'Z(vv')^{-1}\\ &= u(u'Zv'^{-1})v^{-1}\\ &= u(\alpha(u',v')(Z))v^{-1}\\ &= \alpha(u,v)\circ\alpha(u',v')(Z)\end{aligned}$$

Donc $\alpha((u,v)\times(u',v'))=\alpha(u,v)\circ\alpha(u',v')$. ainsi α est un morphisme de groupes.
et on a $(u,v)\in\ker\alpha$, si pour tout $Z\in\mathbb{H}$, on $\alpha(u,v)(Z)=Z$, donc $uZv^{-1}=Z$
Ainsi $uZ=Zv$.
En particulier $E=u.u^*=u^*v$,
Avec $u^*=u^{-1}$ (cf question 1.b) donc $u=v$.
Ainsi pour tout $Z\in\mathbb{H}$, on a $uZ=Zu$, d'où $Z\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ (d'après la question 1.c).
Et $N(u)=1$, alors $u=\pm1$.
Réciproquement si $u=v=\pm1$, on a pour tout $Z\in\mathbb{H}$ $uZv^{-1}=Z$.
D'où $(u,v)\in\ker\alpha$.
On en déduit que $\ker\alpha=\{(-1,-1),(1,1)\}$.

7. Montrons que α est continue

On a l'application $(u,v)\in\mathbb{H}^2\longmapsto(Z\longmapsto uZv)$ est bilinéaire en dimension finie, donc elle est continue sur $\mathbb{H}^2$, en particulier qu'il est est continue sur $S\times S$.

Et $v\longmapsto v^{-1}$ est continue sur S (car pour tout $v\in S$ on a v^{-1} est polynômiale en v d'après le thèorème de Cayley-Hamilton).

Donc α est continue comme étant le composé de deux fonctions continue.

Et on a pour tout $(u,v)\in S\times S$:

$$\begin{aligned}N(\alpha(u,v)(Z)) &= N(uZv^{-1})\\ &= N(u)N(Z)N(v^{-1})\\ &= N(Z)\end{aligned}$$

En particulier $\sqrt{N(\alpha(u,v)(Z))}=\sqrt{N(Z)}$ et $\sqrt{N}$ est une norme euclidienne (cf partie I)
Alors $\alpha(u,v)\in O(H)$.
Pour tout $(u,v)\in S\times S$, on a $\det(\alpha(u,v))\neq0$.
Et puisque det est continue sur GL($\mathbb{H}$) et α est continue donc $\det\circ\alpha$ est continue.

D'autre part $S\times S$ est connexe par arc comme produit de deux parties connexes par arcs alors $\det\circ\alpha$ gadre un signe constant sur S, avec $\det(\alpha(E,E))=1>0$.

Alors pour tout $(u,v)\in S\times S$ $\det(\alpha(u,v))>0$.
Ainsi l'image de α est contenue dans SO($\mathbb{H}$).

8. Soient $\theta\in\mathbb{R}$ et $v\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\cap S$, et soit $u=(\cos\theta)E+(\sin\theta)v$.

8.a Montrons que $u\in S$.

On a $v\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}=\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(I,J,K)$. Notons $v=xI+yJ+zK$ avec $x,y,z\in\mathbb{R}$.
Donc $u=(\cos\theta)E+(\sin\theta)xI+(\sin\theta)yJ+(\sin\theta)zK$
donc $N(u)=(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2x^2+(\sin\theta)^2y^2+(\sin\theta)^2z^2=1$. Car $x^2+y^2+z^2=1$.
Donc $u\in S$.
Or $N(u)>0$ et $N(v)>0$, donc d'après la question 1.b da la partie I, u et v sont inversibles et on a

$$u^{-1}=N(u)u^*=u^* \text{ et } v^*=N(v)v^{-1}=v^{-1}$$

Et on a $u^*=((\cos\theta)E+(\sin\theta)v)^*$, avec $Z\to Z^*$ est $\mathbb{R}-$linéaire.
Donc $u^*=(\cos\theta)E+(\sin\theta)v^*$.
Or $v\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, et d'après la question 3.b $v^2=-N(v)E=-E$, onc $v^*=-v^2v^*=-v$
Ainsi $u^{-1}=u^*=(\cos\theta)E-(\sin\theta)v$.

8.b Soit $\omega \in \mathbb{H}^{\text{im}} \cap S$ un vecteur orthogonal à v.
On a

$$\begin{aligned} C_u(v) &= uvu^{-1} \\ &= ((\cos\theta)E + (\sin\theta)v)v((\cos\theta)E - (\sin\theta)v) \end{aligned}$$

Or $(\cos\theta)E + (\sin\theta)v$, v et $(\cos\theta)E - (\sin\theta)v$ commutent, donc

$$C_u(v) = (\cos\theta)^2 v - (\sin\theta)^2 v^3 = v$$

Car $v^2 = -E$
Et

$$\begin{aligned} C_u(w) &= uwu^{-1} \\ &= ((\cos\theta)E + (\sin\theta)v)w((\cos\theta)E - (\sin\theta)v) \\ &= (\cos\theta)^2 w - \cos(\theta)\sin(\theta)wv + \sin(\theta)\cos(\theta)vw - (\sin\theta)^2 v \\ &= ((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2)w + \cos\theta\sin\theta(vw - wv) \\ &= \cos(2\theta)\, w + \sin(2\theta)vw \end{aligned}$$

Car $v, w \in \mathbb{H}^{\text{im}}$, via la question 5.b on a $wv + vw = 0$.

$$\begin{aligned} C_u(vw) &= uvwu^{-1} \\ &= ((\cos\theta)E + (\sin\theta)v)vw((\cos\theta)E - (\sin\theta)v) \\ &= ((\cos\theta)vw + (\sin\theta)v^2 w)((\cos\theta)E - (\sin\theta)v) \\ &= ((\cos\theta)vw - (\sin\theta)w)((\cos\theta)E - (\sin\theta)v) \\ &= (\cos\theta)^2 vw - \cos\theta\sin\theta(vwv + w) + (\sin\theta)^2 wv \\ &= (\cos\theta)^2 vw - \cos\theta\sin\theta(-v^2 w + w) + (\sin\theta)^2 wv \\ &= (\cos\theta)^2 vw - 2\cos\theta\sin\theta w + (\sin\theta)^2 wv \\ &= ((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2)vw - 2\cos\theta\sin\theta w \\ &= \cos(2\theta)vw - \sin(2\theta)w \end{aligned}$$

Donc

$$\text{mat}_{(v,w,vw)} C_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

9. Montrons que l'application $\varphi: u \longmapsto C_u$ induit un morphisme surjectif de groupes $S \to SO(\mathbb{H}^{\text{im}})$.
On a pour tout $u, v \in S$ et $Z \in \mathbb{H}^{\text{im}}$.

$$\begin{aligned} \varphi(uv)(Z) &= uvZ(uv)^{-1} \\ &= u(vZv^{-1})u^{-1} \\ &= u(C_v(Z))u^{-1} \\ &= C_u \circ C_v(Z) \\ &= \varphi(u) \circ \varphi(v)(Z) \end{aligned}$$

Donc $\varphi(uv) = \varphi(u) \circ \varphi(v)$. Ainsi $u \longmapsto C_u$ est un morphisme de groupes.
La surjectivité de φ est déduite de la question précédente et de définition de SO($\mathbb{H}^{\text{im}}$).
Et pour tout $x \in \text{Ker}\varphi$: on a pour tout $Z \in \mathbb{H}^{\text{im}}$ on a $uZu^{-1} = Z$.
Et puisque $\mathbb{H} = \text{vect}(E) + \mathbb{H}^{\text{im}}$, avec E : la matrice identité, alors pour tout $Z \in \mathbb{H}$, on a u commute avec Z par suite $u \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ (via la question 1.c).
Or $N(u) = 1$. donc $u = \pm 1$.
Réciproquement $u = \pm 1$ vérifie $uZu^{-1} = Z$ pour tout $Z \in \mathbb{H}$.
Ainsi $\ker\varphi = \{-1, 1\}$.

10.a On a pour tout $u \in \mathrm{SO}(\mathbb{H})$,

On a

$$\alpha(\overline{u(E)}, E)(u(E)) = \overline{u(E)}u(E)E = E$$

Donc $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ est stable par $\alpha(\overline{u(E)}, E)$, par orthogonalité, on a l'existence de $v \in \mathbb{H}$ tel que

$$\alpha(\overline{u(E)}, E) \circ u = \alpha(v, v)$$

Ainsi $u = \alpha(\overline{u(E)}, E)^{-1} \circ \alpha(v, v) = \alpha(u(E)v, v)$.

D'où le résultat.

10.b $S \times \{E\}$ est un groupe comme étant le produit de deux groupes, et α est un morphisme alors $N := \alpha(S \times \{E\}) \subset \mathrm{SO}(\mathbb{H})$ est un sous groupe de $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$, comme étant l'image directe d'un groupe par un morphisme de groupes.

Soit $n \in N$ et $g \in \mathrm{SO}(\mathbb{H})$ on a l'existence de $x \in S$ tel que $n = \alpha(x, E)$ et $(u, v) \in \mathbb{H}^2$ tel que $g = \alpha(u, v)$.

On a pour tout $Z \in \mathbb{H}$ $gng^{-1}(Z) = gxZg^{-1} = \alpha(uxu^{-1}, E)(Z)$

Donc $gng^{-1} = \alpha(uxu^{-1}, E) \in N$.

Pour $n = \pm id = \alpha(\pm 1, 1)$ et $g = \mathrm{id} = \alpha(1, 1)$, on a $\{\pm \mathrm{id}\} \subset N \subset \mathrm{SO}(\mathbb{H})$.

Or d'après la question précédente, $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ est stable par tout les éléments de N, on en déduit que $N \neq \mathrm{SO}(\mathbb{H})$.

Il suffit de prendre $\alpha(I, 1) \in N$, on a $\alpha(I, 1) \neq \pm \mathrm{id}$. d'où le résultat.

11. Ona $\mathrm{id}_{\mathbb{H}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, et pour tout $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(H)$, on a pour tout $z, z' \in \mathbb{H}$, on a

$$\varphi \circ \psi^{-1}_{|\mathbb{R}_{\mathbb{H}}} = \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$$

$$\varphi(\varphi^{-1}(zz')) \;=\; zz' = \varphi(\varphi^{-1}(z))\varphi(\varphi^{-1}(z')) = \varphi(\varphi^{-1}(z)\varphi^{-1}(z'))$$

Donc

$$\varphi^{-1}(zz') = \varphi^{-1}(z)\varphi^{-1}(z')$$

Et pour tout $z, z' \in \mathbb{H}$, on a

$$\varphi \circ \psi(zz') = \varphi(\psi(z)\psi(z')) = \varphi(\psi(z))\varphi(\psi(z')) = \varphi \circ \psi(z)\varphi \circ \psi(z')$$

Ainsi $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{H})$.

Soit $u \in S$, on a alors pour tout $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$, $\alpha(u, u)(Z) = uZu^{-1} = Z$.

Donc $\alpha_{|\mathbb{R}_{\mathbb{H}}} = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$.

Et pour tout $Z, Z' \in \mathbb{H}$, on a

$$\alpha(u, u)(Z.Z') = (uZu^{-1})(uZ'u^{-1}) = \alpha(u, u)(Z)\alpha(u, u)(Z')$$

D'où $\alpha(u, u) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. d'où le résultat.

12. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

On a $f(I)^2 = f(I^2) = f(-E) = -E$,

De même, on trouve $f(J^2) = -E$, donc d'après la question 3.b on a $f(I), f(J) \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

Et

$$f(I)f(J) + f(J)f(I) = f(IJ + JI) = f(0) = 0$$

Donc d'après la question 5.a on a $f(I)$ et $f(J)$ sont orthogonaux, par suite via la question 5.b on a $(f(I), f(J), f(K) = f(I)f(J))$ est une base orthormée directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

13.a Montrons que la restriction à $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ induit un isomorphisme de groupes.

D'après la question 8 et 11 $u \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \rightarrow u_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} \in \mathrm{SO}(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$ est surjective.
Si $u_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} = \mathrm{id}_{\mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$, alors pour tout $Z \in \mathbb{H}$, on a $u(Z) = Z$ (car $u_{|\mathbb{R}_{\mathbb{H}}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\mathbb{H}}}$)
Par suite $u_{|\mathbb{H}} = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$.
Ainsi $u \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \rightarrow u_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} \in \mathrm{SO}(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$ est injective.
D'où le résultat.

13.b Montrons que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{\alpha(u,u), u \in S\}$.
On a d'après 11, $\{\alpha(u,u), u \in S\} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.
Et pour tout $u \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, il existe $v \in S$ tel que $u_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} = \alpha(v,v)_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$ (d'après la question 9)
Or $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \oplus \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$, alors $u = \alpha(v,v)$.
D'où $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \subset \{\alpha(u,u), u \in S\}$.
D'où le résultat.

III Normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^2$.

14.a Montrons que $\mathcal{K}$ est une partie compacte et convexe de $M_2(\mathbb{R})$.
En dimension finie, toute les normes sont équivalentes, en particulier il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a $\|x\|_2 \leqslant \alpha \|x\|$, donc pour tout $A \in \mathcal{K}$ on a

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \alpha$$

Donc $\mathcal{K}$ est bornée (pour la norme subordonnée de $\|\|$, en dimension finie, elle est bornée pour n'importe quelle norme).
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrice de $\mathcal{K}$ qui converge vers $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\|x\|_2 \geqslant \|A_n x\|$$

Et pour tout $B \in M_2(\mathbb{R})$ on a $x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \|Bx\|$ est lipschitzienne, en effet
Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\|Bx_1\| - \|Bx_2\|| \leqslant \|B(x_1 - x_2)\| \leqslant \alpha \|x_1 - x_2\|$$

Avec $\alpha > 0$ qu'on a défini dans la question précédente.
En particulier $x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \|Bx\|$ est continue, par suite $\lim_{n \to +\infty} \|A_n x\| = \|Ax\|$, donc $\|x\|_2 \geqslant \|Ax\|$.
Donc $A \in \mathcal{K}$, ainsi $\mathcal{K}$ est fermé, d'où $\mathcal{K}$ est compacte.
Montrons que $\mathcal{K}$ est convexe de $M_2(\mathbb{R})$.
Soient $A, B \in \mathcal{K}$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\|\lambda Ax + (1-\lambda)Bx\| \leqslant \lambda \|Ax\| + (1-\lambda)\|Bx\| \leqslant \|x\|_2$$

Donc $\lambda Ax + (1-\lambda)Bx \in \mathcal{K}$, ainsi $\mathcal{K}$ est convexe.

14.b Montrons qu'il existe $A \in \mathcal{K}$ tel que $\det A = \sup_{B \in \mathcal{K}} \det B$.
On a $B \in \mathcal{K} \rightarrow \det B$ est continue sur le compact $\mathcal{K}$, donc det est bornée sur $\mathcal{K}$ et atteint ses bornes, en particulier il existe $A \in \mathcal{K}$ tel que $\det A = \sup_{B \in \mathcal{K}} \det B$.

15. En dimension finie, toute les normes sont équivalentes, en particulier il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ $\|x\|_2 \geqslant \beta \|x\|$, donc $\|x\|_2 \geqslant \|\beta E.x\|$ donc $\beta E \in \mathcal{K}$.
Ainsi $\det A \geqslant \det(\beta E) = \beta^2 > 0$.
Montrons qu'il existe un élément $x \in \mathcal{C}$ tel que $\|Ax\| = 1$, supposons par l'absurde que pour tout $x \in \mathcal{C}$ $\|Ax\| < 1$.
L'application $x \longmapsto \|Ax\|$ est continue comme composée de deux fonctions continues $x \longmapsto xA$ qui est linéaire en dimension finie, donc continue et $x \longmapsto \|x\|$ est 1-lipschitizienne (d'après l'inégalité triangulaire).

Sur le compact $\mathcal{K}$, $\|Ax\| < 1$ est bornée et atteint ses bornes, $\sup\limits_{x\in\mathcal{C}}\|Ax\| < 1$.
Posons $C = \frac{A}{\sup\limits_{x\in\mathcal{C}}\|Ax\|}$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|Cy\| &= \frac{1}{\sup\limits_{x\in\mathcal{C}}\|Ax\|}\|Ay\| \\ &= \frac{\|y\|_2}{\sup\limits_{x\in\mathcal{C}}\|Ax\|}\left\|A\frac{y}{\|y\|_2}\right\|\end{aligned}$$

Avec $\frac{y}{\|y\|_2} \in \mathcal{C}$, alors $\|Cy\| \leqslant \|y\|_2$, ainsi $C \in \mathcal{K}$.
Par suite $\det(C) \leqslant \det(A)$, donc $\frac{1}{\left(\sup\limits_{x\in\mathcal{C}}\|Ax\|\right)^2}\det(A) \leqslant \det(A)$, avec $\det(A) > 0$, alors $\sup\limits_{x\in\mathcal{C}}\|Ax\| \geqslant 1$.
ce qui est absurde.
D'où le résultat.

16. Soit $B \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ une matrice telle que $x = B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

16.a Soit $r \in]0,1[$, pour montrer qu'il existe $x_r \in \mathcal{C}$ tel que $\left\|AB\begin{pmatrix}r & 0\\0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}x_r\right\| > 1$, il suffit de montrer que que $AB\begin{pmatrix}r & 0\\0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} \notin \mathcal{K}$.

Par l'absurde, supposons que $AB\begin{pmatrix}r & 0\\0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} \in \mathcal{K}$.

On a $A \in \mathcal{K}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $\|Bx\|_2 = \|x\|_2 \leqslant \|ABx\|$.

Ainsi $AB \in \mathcal{K}$. donc par convexité de $\mathcal{K}$, on a $\frac{1}{2}\left[AB + AB\begin{pmatrix}r & 0\\0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}\right] \in \mathcal{K}$.

Avec

$$\det\left(\frac{1}{2}\left[AB + AB\begin{pmatrix}r & 0\\0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}\right]\right) = \frac{1}{4}\det(A)\det(B)\det\begin{pmatrix}r+1 & 0\\0 & \frac{1}{r}+1\end{pmatrix} \leqslant \det(A)$$

Car $\det A = \sup\limits_{B\in\mathcal{K}} \det B$.

Or $\det(B) = 1$, alors $(r+1)\left(\frac{1}{r}+1\right) \leqslant 4$, par suite $\frac{1}{r} + r \leqslant 2$, donc $\left(\frac{1}{r} - r\right)^2 \leqslant 0$,
Ainsi $r = \frac{1}{r}$, absurde avec $0 < r < 1$.
D'où le résultat.

16.b Soit $r \in]0,1[$,
on a d'après la question précédente

$$\left\|AB\begin{pmatrix}ry_r\\ \frac{z_r}{r}\end{pmatrix}\right\| = \left\|AB\begin{pmatrix}r & 0\\0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}x_r\right\| > 1$$

Donc

$$\left\|\begin{pmatrix}ry_r\\ \frac{z_r}{r}\end{pmatrix}\right\|_2 \geqslant \left\|AB\begin{pmatrix}ry_r\\ \frac{z_r}{r}\end{pmatrix}\right\|$$

Car $\frac{\begin{pmatrix}ry_r\\ \frac{z_r}{r}\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}ry_r\\ \frac{z_r}{r}\end{pmatrix}\right\|_2} \in \mathcal{C}$ et $AB \in \mathcal{K}$, donc $\left\|\begin{pmatrix}ry_r\\ \frac{z_r}{r}\end{pmatrix}\right\|_2 > 1$

Par suite $r^2y_r^2 + \frac{z_r^2}{r^2} > 1$ et $y_r^2 + z_r^2 = 1$. Par conséquent $z_r^2\left(\frac{1}{r^2} - r^2\right) > 1 - r^2$
Ainsi $z_r^2 > \frac{1-r^2}{\frac{1}{r^2} - r^2} = \frac{r^2}{r^2+1}$.

D'où le résultat.

17. Montrons qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|Ax\| = \|x\|_2$ pour $x \in \{e_1, e_2\}$.
On a d'après la question 15, il existe $e_1 \in \mathcal{C}$ tel que $\|Ae_1\| = 1$. avec $\|e_1\|_2 = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, puisque $\frac{n-1}{n} \in]0,1[$, alors il d'après la question 16.a il existe $t_n \in \mathcal{C}$ tel que

$$\left\| AB \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{n}{n-1} \end{pmatrix} t_n \right\| > 1$$

On a $\mathcal{C}$ est compact, alors $\left(t_n := \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \right)_{n \geqslant 2}$ admet une sous suite convergente.
il existe $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante, tel que $(t_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, notons $t \in \mathcal{C}$ sa limite.
φ diverge vers $+\infty$, car l'ouvert de $\mathbb{N}$ est vide.
On a $x \to \|x\|$ est continue (1-lipchitizienne d'après l'inégalité triangulaire), et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \frac{\varphi(n)-1}{\varphi(n)} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(n)}{\varphi(n)-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{n}{n-1} \end{pmatrix} x_{\varphi(n)} = t$.
Et par passage à la limite, on a

$$\|ABt\| \geqslant 1$$

Et $t \in \mathcal{C}$, et $AB \in \mathcal{K}$, alors $\|ABt\| \leqslant 1$, donc $\|ABt\| = 1$.
Notons $e_2 = Bt \in \mathcal{C}$.
On a bien $\|e_2\| = 1 = \|e_2\|_2$
Il reste à montrer que (e_1, e_2) est libre pour conclure.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$.
Donc $B\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) = 0$. avec $e_2 := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.
Avec B est inversible, donc $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0$

on a alors $\beta w_2 = 0$.
Or d'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $d_{\varphi(n)} > \frac{\varphi(n)^2}{\varphi(n)^2 + 1}$, par passage à la limite on a $w_2 \geqslant \frac{1}{2}$.
Donc $\beta = 0$, par suite $\alpha = 0$.

D'où le résultat.

18.

19.

IV Algèbres valuées

20.a Soit $x \in A$, alors par définition, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ du polynôme $X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$, on a l'existence de $b_1,\ldots,b_r,\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\beta_1,\ldots,\beta_l\in\mathbb{R}$ tel que

$$X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0=\prod_{i=1}^{r}(X-b_i)\prod_{i=1}^{l}(X^2-\alpha_iX-\beta_i)$$

Donc

$$\prod_{i=1}^{r}(x-b_i)\prod_{i=1}^{l}(x^2-\alpha_ix-\beta_i)=0$$

Avec A est sans diviseur de zéro, alors il existe $i\in[\![1,r]\!]$ tel que $x=b_i$ ou bien il existe $i\in[\![1,l]\!]$ tel que $x^2=\alpha_ix+\beta_i$.

Dans le premier cas on a $x^2=b_ix\in x+\mathbb{R}x$.

Dans le deuxième cas on a $x^2\in x+\mathbb{R}x$.

Ainsi dans tout les cas, $x^2\in x+\mathbb{R}x$.

D'où le résultat.

20.b On définie $\varphi\colon a+bx\in\mathbb{R}+\mathbb{R}x\longmapsto a+ib$.

On a φ est bien définie (car $x\notin\mathbb{R}$), de plus pour tout $a+bx,c+dx\in\mathbb{R}+\mathbb{R}x$, on a

$$\varphi((a+bx)+(c+dx))=(a+c)+i(b+d)=\varphi(c+dx)+\varphi(c+dx)$$

En utilisant la question précédente, notons $x^2=\alpha+\beta x$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi((a+bx)(c+dx)) &= \varphi(ac+(bc+ad)x+bdx^2)\\ &= \varphi(ac+bd\alpha+(bc+ad+\beta bd)x)\\ &= ac+bd\alpha+(bc+ad+\beta bd)i\\ &= ac+(bc+ad)i+bd(\alpha+\beta i)\\ &= a(c+di)+bci+bd\varphi(x^2)\\ &= a\varphi(c+dx)+bci+bd\varphi(x^2)\end{aligned}$$

21. Montrons qu'il existe $i_A\in A$ tel que $i_A^2=-1$.

Pour tout $x\in A$, on a $x^2\in\mathbb{R}+\mathbb{R}x$, donc il existe $a_x,b_x\in\mathbb{R}$ tel que $x^2=a_xx+b_x$.

supposons que pour tout $x\in A$ $a_x^2+4b_x\geqslant 0$.

Alors $\left(x-\frac{a_x-\sqrt{a_x^2+4b_x}}{2}\right)\left(x-\frac{a_x+\sqrt{a_x^2+4b_x}}{2}\right)=0$

Or A est sans diviseur de 0, alors $x=\frac{a_x-\sqrt{a_x^2+4b_x}}{2}\in\mathbb{R}$ ou $x=\frac{a_x+\sqrt{a_x^2+4b_x}}{2}\in\mathbb{R}$.

Donc $A=\mathbb{R}$. absurde.

Donc il existe $x\in\mathbb{R}$ et $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $x^2-ax-b=0$, avec $a^2+4b<0$.

On a alors

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=b+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+4b}{4}$$

On pose $i_A=\frac{2}{\sqrt{-a^2-4b}}\left(x-\frac{a}{2}\right)$, on a alors $i_A^2=-1$.

22.a Soient $x,y\in A$, on a

$$\begin{aligned}T(xy) &= i_Axyi_A\\ &= -i_Ax(i_Ai_A)yi_A\\ &= -(i_Axi_A)(i_Ayi_A)\\ &= -T(x)T(y)\end{aligned}$$

22.b On a pour tout $x\in A$

$$T\circ T(x)=i_A(i_Axi_A)i_A=x=\mathrm{id}(x)$$

Donc $T\circ T$=id, donc $X^2-1=(X-1)(X+1)$ est un annulateur de T, avec $X+1$ et $X-1$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$A=\ker(T-\mathrm{id})\oplus\ker(T+\mathrm{id})$$

23. Montrons que $\ker(T+\mathrm{id})=U$
Soit $x\in\mathrm{Ker}(T+\mathrm{id})$, alors $T(x)=-x$, donc $x=-i_Axi_A$, donc $i_Ax=xi_A$.
Donc x et $i_A$commutent, par suite i_A

Réciproquement, si $x\in U$, alors il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $x=a+bi_A$.
Donc $T(x)=i_A(a+bi_A)i_A=i_Aai_A-i_Ab=ai_Ai_A-bi_A=-a-bi_A=-x$. donc $x\in\mathrm{Ker}(T+\mathrm{id})$.
Ainsi $\ker(T+\mathrm{id})=U$, et puisque

24. On fixe $\beta\in\mathrm{Ker}(T-\mathrm{id})\backslash\{0\}$.

24.a Montrons que l'application $x\longmapsto\beta x$ envoie $\ker(T-\mathrm{id})$ dans $\ker(T+\mathrm{id})$.
Soit $x\in\mathrm{Ker}(T-\mathrm{id})$, donc $T(x)=x$.
Or $\beta\in\mathrm{Ker}(T-\mathrm{id})$ donc $T(\beta)=\beta$.
Donc d'après la question 22.a on a

$$T(\beta x)=-T(\beta)T(x)=-\beta x$$

Par suite $\beta x\in\ker(T+\mathrm{id})$. ainsi $x\longmapsto\beta x$ envoie $\ker(T-\mathrm{id})$ dans $\ker(T+\mathrm{id})$.
Donc $\beta^2=\beta.\beta\in\mathrm{Ker}(T+\mathrm{id})=U$.
On a d'après ce qui précéde, $\beta\ker(T-\mathrm{id})\subset\ker(T+\mathrm{id})=U$.
De plus

24.b

24.c

25. Soient $x,y\in A$ tels que $xy=yx$ et tels que $V=\mathbb{R}x+\mathbb{R}y$ soit de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
Montrons que pour tout $u,v\in V$, on a

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2\geqslant4\|u\|.\|v\|$$

Soient $u,v\in\mathbb{R}x+\mathbb{R}y$, puisque x,y commutent, alors u,v commutent comme étant polynôme e, x et y.
Or $\|u+v\|^2=\|(u+v)^2\|$ et $\|u-v\|^2=\|(u-v)^2\|$
Par l'inégalité triangulaire inverse, on a

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2\geqslant\|(u+v)^2-(u-v)^2\|\geqslant4\|u\|.\|v\|$$

Montrons que la restiction de $\|.\|$ à V provient d'un produit scalaire sur V.
On a $V=x\mathbb{R}+y\mathbb{R}$ de dimension 2, donc V est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.
donc il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi:\mathbb{R}^2\rightarrow V$.
On a pour tout $x,y\in\mathbb{R}^2$.

$$\|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2+\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2\geqslant4\|\varphi(x)\|.\|\varphi(y)\|$$

Ainsi

$$\|\varphi(x+y)\|^2+\|\varphi(x-y)\|^2\geqslant4\|\varphi(x)\|.\|\varphi(y)\|$$

Avec $\psi:\mathbb{R}^2:x\rightarrow\|\varphi(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, en effet pour tout $x,y\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a
Si $\|\varphi(x)\|=0$, alors $\varphi(x)=0$, par injectivité on a $x=0$.
De plus $\|\varphi(\lambda x)\|=|\lambda|\|\varphi(x)\|$ et $\|\varphi(x+y)\|=\|\varphi(x)+\varphi(y)\|\leqslant\|\varphi(x)\|+\|\varphi(y)\|$.
On a d'après le théorème A, on a $x\rightarrow\|\varphi(x)\|$ provient d'un produit scalaire $\langle.|.\rangle$.

Notons $\zeta\colon (u,v)\in V \to \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)\rangle$.

On a ζ est symétrique. De plus pour tout $u\in V$ $\zeta(u,u)=\|\varphi(\varphi^{-1}(u))\|=\|u\|\geqslant 0$. donc ζ est positif.

Et on a par linéarité de φ^{-1}, ζ est bilinéaire.

Et par injectivité, ζ est définie.

Donc ζ définie un produit scalaire sur V.

$\|\|$ provient de ζ.

D'où le résultat.

26. Soit $x\in A$, si $x\in\mathbb{R}$, il est évident que $x^2\in\mathbb{R}+\mathbb{R}x$.

Supposons que $x\in A\backslash\mathbb{R}$, alors $V=x+\mathbb{R}x$ est de dimension 2.

D'après la question précédente, $\|.\|$ provient d'un produit scalaire sur V.

Par suite notons y: un vecteur orthogonal non nul de 1 dans V.

Alors on a $(1,y)$ forme une base de V. Donc il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $x=a+by$.

Ainsi $x^2=a^2+2aby+y^2$.

Avec

$$\begin{aligned}
\langle 1, y^2\rangle &= \frac{1}{2}(\|y^2\|^2+1-\|y^2-1\|^2)\\
&= \frac{1}{2}(\|y^2\|^2+1-\|y-1\|^2\|y+1\|^2)\\
&= \frac{1}{2}(\|y\|^4+1-(\|y\|^2+1)^2)\\
&= \frac{1}{2}(\|y\|^4+1-\|y\|^4-2\|y\|^2-1\Big)\\
&= -\|y^2\|\\
&= -\|1\|^2\|y^2\|
\end{aligned}$$

Et donc d'après le cas d'égalit » dans l'inégalité de cauchy-schwarz, on a $y^2\in\mathbb{R}$.

D'où

$$x^2\in\mathbb{R}+\mathbb{R}_y=\mathbb{R}+\mathbb{R}_x$$

27. D'après la question précédente, on a A est algébrique (car pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $x^2=ax+b$)

Et A est sans diviseur de zéro, en effet pour $x,y\in A$ tel que $xy=0$, alors $\|x\|\|y\|=\|xy\|=0$ donc $\|x\|=0$ ou $\|y\|=0$, par suite $x=0$ ou $y=0$.

Donc d'après le théorème B, A est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

D'où le théorème C.