la formule de Mertens

PAR SABIR ILYASS

01 avril 2021

Théorème 1. *(théorème de Legendre)*

soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Pour tout nombre premier p on a:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

Démonstration. □

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et p premier, on note $n_0 = \max \left\{ k \in \mathbb{N}, \frac{n}{p^k} \geqslant 1 \right\}$ (n_0 existe puisque $\frac{n}{p^k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n > 0$)

En réalité $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$ est fini, puisque $\forall k \geqslant n_0 + 1$ $\left[\frac{n}{p^k} \right] = 0$

Et on a alors : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right] = \sum_{k=1}^{n_0} \left[\frac{n}{p^k} \right]$

commencons par montrer le lemme suivant :

Lemme 2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$, le nombre des multiples de a dans $[\![1, b]\!]$ est : $\left[\frac{b}{a} \right]$

Démonstration. □

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$,

Si $b < a$:

on a aucune multiple de a entre 1 et b,donc le nombre des multiple de a dans $[\![1, b]\!]$ est : $0 = \left[\frac{b}{a} \right]$

Si $b \geqslant a$:

soit $x \in [\![1, b]\!]$,tel que a divise x, alors $\exists k \in \mathbb{N}^\star$ $x = k.a$

On a $1 \leqslant k.a \leqslant b$,donc $0 < \frac{1}{a} \leqslant k \leqslant \frac{b}{a}$, donc $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{b}{a} \right]$,

et inversement pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{b}{a} \right]$, on a $a \leqslant a.k \leqslant a.\left[\frac{b}{a} \right] \leqslant b$, avec $k.a$ est un multiple de a

alors le nombre des multiples de a dans $[\![1, b]\!]$ est : $\left[\frac{b}{a} \right]$

Pour tout nombre premier p on a :

$$v_p(n!) = v_p\left(\prod_{k=1}^{n} k \right) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k)$$

On note pour tout $i \in [\![0, n_0]\!]$, $A_i = \{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^i \,\text{divise}\, k \,\text{et}\, p^{i+1} \,\text{ne divise pas}\, k\}$

On a bien $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_0}$ est une partition de $[\![1, n]\!]$ (par construction), donc

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{n_0} \left(\sum_{k \in A_i} v_p(k) \right)$$

Or $\forall i \in [\![0, n_0]\!], \forall k \in A_i \, p^i \,\text{divise}\, k \,\text{et}\, p^{i+1} \,\text{ne divise pas}\, k$, donc $\forall i \in [\![0, n_0]\!], \forall k \in A_i \, v_p(k) = i$

D'où

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{n_0} i.\#(A_i) = \sum_{i=1}^{n_0} i.\#(A_i)$$

Or pour tout $i \in [\![1, n_0]\!]$,On a :

$$A_i = \{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^i \,\text{divise}\, k \,\text{et}\, p^{i+1} \,\text{ne divise pas}\, k\} = \{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^i \,\text{divise}\, k \,\} \backslash \{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^{i+1} \,\text{divise}\, k \,\}$$

Puisque $\{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^{i+1} \,\text{divise}\, k \,\} \subset \{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^i \,\text{divise}\, k \,\}$, Alors

$$\#A_i = \#\{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^i \,\text{divise}\, k \,\text{et}\, p^{i+1} \,\text{ne divise pas}\, k\} = \#\{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^i \,\text{divise}\, k \,\} \backslash -\#\{k \in [\![1, n]\!] \,/\, p^{i+1} \,\text{divise}\, k \,\}$$

Donc :

$$\#A_i = \left[\frac{n}{p^i} \right] - \left[\frac{n}{p^{i+1}} \right]$$

Ainsi

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n_0} i. \left(\left[\frac{n}{p^i} \right] - \left[\frac{n}{p^{i+1}} \right] \right) = \sum_{k=1}^{n_0} \left[\frac{n}{p^k} \right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

Théorème 3. *(la formule de Mertens)*

we have

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1)$$

Démonstration. $\square$

Soit $x > 2$, notons $n = [x]$

On a

$$n! = \prod_{p \leqslant x} p^{v_p(n!)}$$

Donc :

$$\log(n!) = \sum_{p \leqslant x} v_p(n!) \log(p)$$

Et pour tout nombre premier $p \leqslant x$, on a d'après le theoreme de Legendre:

$$\frac{n}{p} - 1 < \left[\frac{n}{p}\right] < v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

Donc

$$n \sum_{p \leqslant x} \left(\frac{\log(p)}{p} - \frac{\log(p)}{n} \right) \leqslant \log(n!) = \sum_{p \leqslant x} v_p(n!) \log(p) \leqslant n \sum_{p \leqslant x} \left(\frac{\log(p)}{p} + \frac{\log(p)}{p(p-1)} \right)$$

Donc:

$$\frac{\log(n!)}{n} - \sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{p(p-1)} - \log(x) \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{p} - \log(x) \leqslant \frac{\log(n!)}{n} - \log(x) + \sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{n}$$

Avec :

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{n} = \frac{1}{n} \log\left(\prod_{p \leqslant x} p \right) = \frac{1}{n} \log\left(\prod_{p \leqslant n} p \right)$$

Or, on a pout tout entier $m \geqslant 0$ $\;2 \times 4^m = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$

Donc

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{1}{2}\left[\binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \right] \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 4^m$$

Pour tout nombre premier $m+1 < p \leqslant 2m+1$, on a p divise $(2m+1)!$, alors p divise : $m!(m+1)!\binom{2m+1}{m}$

Avec $p > m+1$,alors p ne divise ni $m!$ ni $(m+1)!$, d'où d'après le lemme de GAUSS p divise $\binom{2m+1}{m}$

Donc : $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$

Ainsi :

$$\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $m\in\mathbb{N}^\star$ que $\prod\limits_{p\leqslant m} p\leqslant 4^m$

pour $m=1$, on a $\prod\limits_{p\leqslant m} p=\prod\limits_{p\leqslant 1} p=1\leqslant 4=4^m$

Soit $m\in\mathbb{N}^\star$, supposons que $\forall k\in[\![1,m]\!]\ \prod\limits_{p\leqslant k} p\leqslant 4^k$ et montrons que $\prod\limits_{p\leqslant m+1} p\leqslant 4^{m+1}$

Si $m+1$ n'est pas premier, on a alors :

$$\prod_{p\leqslant m+1} p\leqslant \prod_{p\leqslant m} p\leqslant 4^m\leqslant 4^{m+1}$$

Si $(m+1)$ est premier,

si $m=1$, on a $\prod\limits_{p\leqslant m+1} p=2\leqslant 4^2=4^{m+1}$

si $m>1$, on a $(m+1)$ est impair, donc $\exists k_0\in[\![1,m]\!]\ m+1=2k_0+1$

On a alors :

$$\prod_{p\leqslant m+1} p=\prod_{p\leqslant 2k_0+1} p=\prod_{p\leqslant k_0+1} p\prod_{k_0+1<p\leqslant 2k_0+1} p\leqslant 4^{k_0}\times 4^{k_0+1}=4^{m+1}$$

D'où pour tout $m\in\mathbb{N}^\star$ que $\prod\limits_{p\leqslant m} p\leqslant 4^m$

Par suite :

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log(p)}{n}=\frac{1}{n}\log\left(\prod_{p\leqslant x} p\right)=\frac{1}{n}\log\left(\prod_{p\leqslant n} p\right)\leqslant\frac{1}{n}\log(4^n)=\log(4)$$

Et on a:

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log(p)}{p(p-1)}\leqslant\sum_{2\leqslant k\leqslant n}\frac{\log(k)}{k(k-1)}$$

Comme $\frac{\log(k)}{\sqrt{k}}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$, alors $\frac{\log(k)}{k(k-1)}=o\left(\frac{1}{\sqrt{k}(k-1)}\right)$, avec $\frac{1}{\sqrt{k}(k-1)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k^{3/2}}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 2}\frac{1}{k^{3/2}}$ converge

Alors $\sum\limits_{k\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{k}(k-1)}$ converge, et par suite $\sum\limits_{k\geqslant 2}\frac{\log(k)}{k(k-1)}$ converge.

On a donc par positivité des termes:

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log(p)}{p(p-1)}\leqslant\sum_{2\leqslant k\leqslant n}\frac{\log(k)}{k(k-1)}\leqslant\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\log(k)}{k(k-1)}<+\infty$$

D'où

$$\frac{\log(n!)}{n}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\log(k)}{k(k-1)}-\log(x)\leqslant\sum_{p\leqslant x}\frac{\log(p)}{p}-\log(x)\leqslant\frac{\log(n!)}{n}-\log(x)+\log(4)$$

D'après la formule de Stirling :

$$\frac{\log(n!)}{n}=\log(n)-1+O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$$

Donc :

$$\frac{\log(n!)}{n} - \log(x) = \log\left(\frac{n}{x}\right) - 1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$$

Avec $n \leqslant x < n+1$, donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{n}{x} \leqslant 1$

On a donc : $\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant \log\left(\frac{n}{x}\right) \leqslant 0$

On a $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \exists M > 0\ \forall m \geqslant N_1 \left|O\left(\frac{\log(m)}{m}\right)\right| \leqslant M.\frac{\log(m)}{m}$

Donc $\forall x \geqslant N_1$, ona $\quad n \geqslant N_1$ ona :

$$\left|\frac{\log(n!)}{n} - \log(x)\right| \leqslant 1 + \left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right| + M\frac{\log(n)}{n} \leqslant 1 + \log\left(\frac{x}{x-1}\right) + M.\frac{\log(n)}{n}$$

Donc:

$$\left|\frac{\log(n!)}{n} - \log(x)\right| \leqslant 1 + \left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right| + M\frac{\log(n)}{n} \leqslant 1 + \log\left(\frac{x}{x-1}\right) + M$$

Comme $\log\frac{x}{x-1} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$, alors $\exists \eta > 0, \forall x \geqslant \eta\ \ \log\frac{x}{x-1} \leqslant 1$

Pour $N = \max\left(N_1, [\eta] + 1\right)$, on a pour tout $x \geqslant N$

$$\left|\frac{\log(n!)}{n} - \log(x)\right| \leqslant 2 + M$$

Donc pour tout $x \geqslant \eta$, on a

$$-\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\log(k)}{k(k-1)} - 2 - M \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{p} - \log(x) \leqslant 2 + M + \log(4)$$

D'où

$$\left|\sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{p} - \log(x)\right| \leqslant 2 + M + \max\left(\log(4), \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\log(k)}{k(k-1)}\right)$$

D'où

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1)$$