ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2018 **FILIÈRE MPI**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULCR)

Corrigé par: SABIR ILYASS.⋆

⋆NB: si vous trouvez des erreurs de francais, et / ou de mathématiques, ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à:

ilyasssabir7@gmail.com

⋆⋆⋆

Les parties I et II sont indépendantes.

1. Partie I

Dans cette partie, E est un ensemble fini ou dénombrable. L'ensemble des probabilités sur E est l'ensemble

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \mu : E \to [0,1] | \sum_{x \in E} \mu(x) = 1 \right\}$$

Une matrice de transition sur E est une application $P : E \times E \to [0,1]$ telle que pour tout $x \in E$, on a

$$\sum_{y \in E} P(x,y) = 1$$

Le produit PQ de deux matrices de transition P et Q est défini par

$$\forall (x,z) \in E \times E \, (PQ)(x,z) = \sum_{y \in E} P(x,y) Q(y,z)$$

On notera I la matrice de transition définie par $I(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si } x \neq y \end{cases}$

1.1. (a) **Vérifier que si P et Q sont des matrices de transition, PQ est aussi une matrice de transition.**

Soient P, Q deux matrices de transition, on a pour tout $x \in E$

$$\sum_{y \in E} (PQ)(x,y) = \sum_{y \in E} \sum_{z \in E} P(x,z) Q(z,y)$$

Avec la famille $(P(x,z)Q(z,y))_{(y,z) \in E \times E}$ est à terme positifs, donc via le théorème de Fubini-Tonelli on a:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in E} (PQ)(x,y) &= \sum_{z \in E} \sum_{y \in E} P(x,z) Q(z,y) \\ &= \sum_{z \in E} P(x,z) \sum_{y \in E} Q(z,y) \end{aligned}$$

Puisque Q est une matrice de transition, alors $\sum_{y \in E} Q(z,y) = 1$,

Ensuite $\sum_{y \in E} (PQ)(x,y) = \sum_{z \in E} P(x,z) = 1$, car P est une matrice de transition, d'où le résultat.

(b) **Vérifier que si $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{R}$ sont des matrices de transition, on a $\boldsymbol{(PQ)R=P}$(QR).**

On a pour tout $(x,y)\in E\times E$

$$\begin{aligned}(PQ)R(x,y) &= \sum_{z\in E}(PQ)(x,z)R(z,y)\\ &= \sum_{z\in E}\sum_{t\in E}P(x,t)Q(t,z)R(z,y)\end{aligned}$$

La famille $(P(x,t)Q(t,z)R(z,y))_{(z,t)\in E\times E}$ est à terme positifs, donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli on a:

$$\begin{aligned}(PQ)R(x,y) &= \sum_{t\in E}\sum_{z\in E}P(x,t)Q(t,z)R(z,y)\\ &= \sum_{t\in E}P(x,t)\sum_{z\in E}Q(t,z)R(z,y)\\ &= \sum_{t\in E}P(x,t)(\mathrm{QR})(t,y)\\ &= P(QR)(x,y)\end{aligned}$$

Et ça pour tout $(x,y)\in E\times E$, donc $(PQ)R=P(\mathrm{QR})$.

(c) Pour tout entier $n\geqslant 0$ et toute matrice de transition P, on définit P^n par $P^0=I$ et la relation de récurrence $P^{n+1}=P^nP$ si $n\geqslant 0$. **Vérifier que $\boldsymbol{P^n}$ est bien une matrice de transition.**

Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, on a pour $n=0$, $P^0=I$ est une matrice de transition.

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que P^n est une matrice de transition, et puisque P est une matrice de transition, alors via la question **1.1.a** le produit $P^{n+1}=P^nP$ est une matrice de transition, d'où le résultat.

Étant données $\mu\in\mathcal{P}(E)$, une matrice de transition P et des fonctions bornées $f:E\to\mathbb{R}$ et $g:E\to\mathbb{R}$, on définit les nombres réels suivants

$$\begin{aligned}\mu[f] &= \sum_{x\in E}\mu(x)f(x).\\ \mu P(y) &= \sum_{x\in E}\mu(x)P(x,y), \text{où}\, y\in E.\\ Pf(x) &= \sum_{y\in E}P(x,y)f(y), \text{où} x\in E.\\ \langle f,g\rangle_\mu &= \mu[fg].\end{aligned}$$

1.2. Soit $\mu\in\mathcal{P}(E)$, soient P et Q des matrices de transition et soit $f:E\to\mathbb{R}$ une fonction bornée

($\boldsymbol{a}$) Montrer que $\boldsymbol{\mu P\in\mathcal{P}(E)}$ et que $\boldsymbol{(\mu P)Q=\mu(PQ)}$.

Montrons d'abord que $\mu P\in\mathcal{P}(E)$.

On a pour tout $x\in E$

$$\sum_{x\in E}\mu P(x) = \sum_{x\in E}\sum_{y\in E}\mu(y)P(y,x)$$

La famille $(\mu(y)P(y,x))_{(x,y)\in E\times E}$ est à terme positifs, donc via le théorème de Fubini-Tonelli on a:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in E}\mu P(x) &= \sum_{y\in E}\sum_{x\in E}\mu(y)P(y,x)\\ &= \sum_{y\in E}\mu(y)\left(\sum_{x\in E}P(y,x)\right)\\ &= \sum_{y\in E}\mu(y)\,(\text{car } P \text{ est une matrice de transition})\\ &= 1\,(\text{car } \mu\in\mathcal{P}(E))\end{aligned}$$

De plus pour tout $x\in E$ on a $0\leqslant\mu P(x)\leqslant\sum_{x\in E}\mu P(x)=1$. Donc $\mu P\in\mathcal{P}(E)$

Montrons maintenant que $(\mu P)Q=\mu(PQ)$.

On a pour tout $y\in E$, on a

$$\begin{aligned}(\mu P)Q(x) &= \sum_{x\in E}(\mu P)(x)Q(x,y)\\ &= \sum_{x\in E}\sum_{z\in E}\mu(z)P(z,x)Q(x,y)\end{aligned}$$

Avec la famille $(\mu(z)P(z,x)Q(x,y))_{(x,z)\in E\times E}$ est à termes positifs, donc on a via le théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}(\mu P)Q(x) &= \sum_{z\in E}\sum_{x\in E}\mu(z)P(z,x)Q(x,y)\\ &= \sum_{z\in E}\mu(z)\left(\sum_{x\in E}P(z,x)Q(x,y)\right)\\ &= \sum_{z\in E}\mu(z)(PQ)(z,y)\\ &= \mu(PQ)(y)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(*b*) Montrer que $Pf:E\to\mathbb{R}$ est une fonction bornée et que $\mu P[f]=\mu[Pf]$.

On a pour tout $x\in E$

$$\begin{aligned}|Pf(x)| &= \left|\sum_{y\in E}P(x,y)f(y)\right|\\ &\leqslant \sum_{y\in E}P(x,y)|f(y)|\\ &\leqslant \max_{z\in E}|f(z)|\sum_{y\in E}P(x,y)\\ &\leqslant \max_{z\in E}|f(z)|\\ &< +\infty\,(\text{car } f \text{ est bornée})\end{aligned}$$

D'où Pf est bornée. Montrons maintenant que $\mu P[f]=\mu[Pf]$

On a

$$\begin{aligned}\mu P[f] &= \sum_{x\in E} \mu P(x) f(x)\\ &= \sum_{x\in E}\sum_{y\in E} \mu(y)P(y,x)f(x)\end{aligned}$$

La famille $(\mu(y)P(y,x)f(x))_{(x,y)\in E\times E}$ est sommable, en effet on a

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E}\sum_{x\in E} |\mu(y)P(y,x)f(x)| &= \sum_{y\in E}\mu(y)\sum_{x\in E}P(y,x)|f(x)|\\ &\leqslant \|f\|_\infty \sum_{y\in E}\mu(y)\sum_{x\in E}P(y,x)\\ &= \|f\|_\infty \sum_{y\in E}\mu(y)\\ &= \|f\|_\infty\\ &< +\infty\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème Fubini-Tonelli la famille $(\mu(y)P(y,x)f(x))_{(x,y)\in E\times E}$ est sommable.

Et on a

$$\begin{aligned}\mu P[f] &= \sum_{x\in E}\sum_{y\in E} \mu(y)P(y,x)f(x)\\ &= \sum_{y\in E}\mu(y)\left(\sum_{x\in E}P(y,x)f(x)\right)\\ &= \sum_{y\in E}\mu(y)Pf(y)\\ &= \mu[Pf]\end{aligned}$$

(*c*) Montrer que $(PQ)f = P(Qf)$.

Pour tout $x\in E$, on a

$$\begin{aligned}(PQ)f(x) &= \sum_{y\in E}(PQ)(x,y)f(y)\\ &= \sum_{y\in E}\sum_{z\in E}P(x,z)Q(z,y)f(y)\end{aligned}$$

La famille $(P(x,z)Q(z,y)f(y))_{(y,z)\in E\times E}$ est sommable, en effet

$$\begin{aligned}\sum_{z\in E}\sum_{y\in E}|P(x,z)Q(z,y)f(y)| &= \sum_{z\in E}\sum_{y\in E}P(x,z)Q(z,y)|f(y)|\\ &\leqslant \|f\|_\infty \sum_{z\in E}P(x,z)\left(\sum_{y\in E}Q(z,y)\right)\\ &= \|f\|_\infty \sum_{z\in E}P(x,z)\\ &= \|f\|_\infty\\ &< +\infty\end{aligned}$$

Et donc via le thèoréme de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}(PQ)f(x) &= \sum_{z\in E}\sum_{y\in E}P(x,z)Q(z,y)f(y)\\ &= \sum_{z\in E}P(x,z)\left(\sum_{y\in E}Q(z,y)f(y)\right)\\ &= \sum_{z\in E}P(x,z)(Qf)(z)\\ &= P(Qf)(x)\end{aligned}$$

Et ça pour tout $x\in E$. d'où $(PQ)f=P(Qf)$.

Une matrice de transition P sera dite **réversible** par rapport à un élément π de $\mathcal{P}(E)$ si pour tout $(x,y)\in E^2$, on a

$$\pi(x)P(x,y)=\pi(y)P(y,x).$$

Une matrice de transition P sera dite **irréductible** si pour tout $(x,y)\in E^2$, il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que $P^n(x,y)>0$.

On se donne, sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, et une variable aléatoire X_0 à valeurs dans E, indépendante de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$. On se donne une fonction $F: E\times\mathbb{R}\to E$ et on définit une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans E en posant, pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$X_n=F(X_{n-1},U_n)$$

La loi de X_n est notée μ_n. On rappelle que c'est l'élément de $\mathcal{P}(E)$ défini par $\mu_n(x)=\mathbb{P}[X_n=x]$ pour tout $x\in E$.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle bornée X sera notée $\mathbb{E}[X]$.

Pour tout $(x,y)\in E^2$, on pose $P(x,y)=\mathbb{P}[F(x,U_1)=y]$.

1.3. (*a*) Vérifier que P est une matrice de transition et que, pour tout entier $n\geqslant 0$ et tout $(x_0,\dots,x_n)\in E^{n+1}$, on a

$$\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]=\mu_0(x_0)\prod_{i=1}^{n}P(x_{i-1},x_i).$$

Vérifiant d'abord que P est une matrice de transition, on a pour tout $x\in E$:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E}P(x,y) &= \sum_{y\in E}\mathbb{P}[F(x,U_1)=y]\\ &= 1\end{aligned}$$

D'où P est une matrice de transition.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n] &= \mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=x_n]\\ &= \mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},F(X_{n-1},U_n)=x_n]\\ &= \mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},F(x_{n-1},U_n)=x_n]\end{aligned}$$

Par itération, on obtient

$$\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n] = \mathbb{P}[X_0=x_0,F(x_0,U_n)=x_1\dots,,F(x_{n-1},U_n)=x_n]$$

Avec $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ $(F(x,U_k))_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et X_0 est indépendante de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$, donc X_0 est indépendante de la suite $(F(x,U_k))_{k\geqslant 1}$ où $x\in E$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n] &= \mathbb{P}[X_0=x_0]\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}[F(x_{k-1},U_n)=x_k]\\ &= \mathbb{P}[X_0=x_0]\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}[F(x_{k-1},U_1)=x_k]\\ &= \mu_0(x_0)\prod_{k=1}^{n}P(x_{k-1},x_k)\end{aligned}$$

(b)Montrer que pour tout entier $n\geqslant 0$ et tout $(x_0,\ldots,x_n)\in E^{n+1}$ tel que $\mathbb{P}[X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n]>0$, on a, pour tout $x\in E$,

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=x|X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n]=P(x_n,x)$$

Soit $n\in\mathbb{N}$, $x\in E$ et soit $(x_0,\ldots,x_n)\in E^{n+1}$ tel que $\mathbb{P}[X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n]>0$.

Posons $x_{n+1}=x$. En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1}|X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n] &= \frac{\mathbb{P}[X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n,X_{n+1}=x_{n+1}]}{\mathbb{P}[X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n]}\\ &= \frac{\mu_0(x_0)\prod_{k=1}^{n+1}P(x_{k-1},x_k)}{\mu_0(x_0)\prod_{k=1}^{n}P(x_{k-1},x_k)}\\ &= P(x_n,x_{n+1})\\ &= P(x_n,x)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) Montrer que pour tout $n\geqslant 0$, on a $\mu_n=\mu_0P^n$ et que si $\mu_0P=\mu_0$, alors $\mu_n=\mu_0$ pour tout $n\geqslant 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a pour tout $x\in E$, on a par formule de probabilité totale, en utilisant la question 1.3.a, et en posant $x_n=x$:

$$\begin{aligned}\mu_n(x) &= \mathbb{P}[X_n=x]\\ &= \sum_{x_0\in E}\sum_{x_1\in E}\cdots\sum_{x_{n-1}\in E}\mathbb{P}[X_n=x,X_0=x_0,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1}]\\ &= \sum_{x_0\in E}\sum_{x_1\in E}\cdots\sum_{x_{n-1}\in E}\mathbb{P}[X_0=x_0,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=x]\\ &= \sum_{x_0\in E}\sum_{x_1\in E}\cdots\sum_{x_{n-1}\in E}\mu_0(x_0)\prod_{k=1}^{n}P(x_{k-1},x_k)\\ &= \sum_{x_0\in E}\mu_0(x_0)\sum_{x_1\in E}\cdots\sum_{x_{n-1}\in E}\prod_{k=1}^{n}P(x_{k-1},x_k)\end{aligned}$$

Par une simple récurrence, on peut montrer facilement la formule qui donne le produit fini de plusieurs matrices de transitions:

$$\sum_{x_1 \in E} \cdots \sum_{x_{n-1} \in E} \prod_{k=1}^{n} P(x_{k-1}, x_k) = P^n(x_0, x_n)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu_n(x) &= \sum_{x_0 \in E} \mu_0(x_0) P^n(x_0, x_n) \\ &= \mu_0 P^n(x_n) \\ &= \mu_0 P^n(x) \end{aligned}$$

Et ça pour tout $x \in E$, alors $\mu_n = \mu_0 P^n$.
Supposons que $\mu_0 P = \mu_0$, Et montrons par récurrence que $\mu_n = \mu_0$ pour tout $n \geqslant 0$
Pour $n = 0$, on a bien $\mu_0 P^0 = \mu_0 I = \mu_0$
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mu_n = \mu_0 P^n$ et montrons que $\mu_n = \mu_0 P^{n+1}$
On a par hypothèse de récurrence $\mu_n P^{n+1} = (\mu_0 P^n) P = \mu_0 P = \mu_0$
D'où le résultat.

(d) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in E$ tel que $\mu_0(x) > 0$, on a

$$\mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] = P^n(x, y) \text{ pour tout } y \in E.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x, y \in E$, tel que $\mu_0(x) > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] &= \frac{\mathbb{P}[X_n = y, X_0 = x]}{\mathbb{P}[X_0 = x]} \\ &= \frac{1}{\mu_0(x)} \mathbb{P}[X_n = y, X_0 = x] \end{aligned}$$

Notons $x_0 = x, x_n = y$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] &= \frac{1}{\mu_0(x)} \sum_{x_1 \in E} \cdots \sum_{x_{n-1} \in E} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] \\ &= \frac{1}{\mu_0(x)} \sum_{x_1 \in E} \cdots \sum_{x_{n-1} \in E} \mu_0(x_0) \prod_{k=1}^{n} P(x_{k-1}, x_k) \\ &= \sum_{x_1 \in E} \cdots \sum_{x_{n-1} \in E} \prod_{k=1}^{n} P(x_{k-1}, x_k) \\ &= P^n(x_0, x_n) \\ &= P^n(x, y) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(e) Montrer que pour toute fonction $f: E \to \mathbb{R}$ bornée, on a

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mu_0[P^n f].$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_n)] &= \sum_{x\in E} f(x)\mathbb{P}[X_n = x]\\
&= \sum_{x\in E} f(x)\mu_n(x)\\
&= \sum_{x\in E} \mu_0 P^n(x) f(x)\\
&= \mu_0 P^n[f]\\
&= \mu_0[P^n f] \quad (d'après\, la\, question\, 1.2.c)
\end{aligned}$$

À partir de maintenant, on supposera que

• P est réversible par rapport à une probabilité $\pi\in\mathcal{P}(E)$,

• il existe $a\in E$ tel que $\pi(a)>0$ et tel que, pour tout $x\in E$, il existe un entier $n\geqslant 1$ pour lequel $P^n(a,x)>0$.

1.4. Montrer que $\pi P=\pi$.

On a pour tout $x\in E$

$$\begin{aligned}
\pi P\,(x) &= \sum_{y\in E} \pi(y)P(y,x)\\
&= \sum_{y\in E} \pi(x)P(x,y)\\
&= \pi(x)\sum_{y\in E} P(x,y)\\
&= \pi(x)
\end{aligned}$$

Et ça pour tout $x\in E$, alors $\pi P=\pi$.

1.5. (*a*) Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, la matrice de transition P^n est réversible par rapport à π.

Essayons de montrer le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$

Pour $n=1$, on a par définition de P, P est réversible par rapport à π.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, supposons que P^n est réversible par rapport à π, et montrons que P^{n+1} est réversible par rapport à π

On a

$$\begin{aligned}
\pi(x)P^{n+1}(x,y) &= \pi(x)(P^nP)(x,y)\\
&= \sum_{z\in E} \pi(x)P^n(x,z)P(z,y)\\
&= \sum_{z\in E} \pi(z)P^n(z,x)P(z,y)\\
&= \sum_{z\in E} \pi(z)P(z,y)P^n(z,x)\\
&= \sum_{z\in E} \pi(y)P(y,z)P^n(z,x)\\
&= \pi(y)\sum_{z\in E} P(y,z)P^n(z,x)\\
&= \pi(y)(PP^n)(y,x)\\
&= \pi(y)P^{n+1}(y,x)
\end{aligned}$$

Ainsi P^{n+1} est réversible par rapport à π, d'où le résultat par récurrence sur $n\geqslant 1$.

(b) Soit $n\geqslant 1$ et soit $x\in E$. Montrer que si $P^n(a,x)>0$, on a $P^n(x,a)>0$ et $\pi(x)>0$.

On a d'après la question précédente.

$$\pi(a)P^n(a,x)=\pi(x)P^n(x,a)$$

Avec $\pi(a)>0$, et $P^n(a,x)>0$, alors $\pi(x)P^n(x,a)>0$, avec $\pi(x)\geqslant 0$, alors $P^n(x,a)>0$ et $\pi(x)>0$.

(c) Montrer que $\pi(x)>0$ pour tout $x\in E$.

On a pour tout $x\in E$, il existe un entier $n\geqslant 1$ pour lequel $P^n(a,x)>0$. donc d'après la question précédente on a $\pi(x)>0$.

(d) Montrer que P est irréductible.

Soit $(x,y)\in E^2$, on a l'existance de $n_1,n_2>0$ tel que $P^{n_1}(a,x),P^{n_2}(a,y)>0$.
Et d'après la question précédente $\pi(x),\pi(y)>0$. On a alors

$$\begin{aligned}
P^{n_1+n_2}(x,y) &= (P^{n_1}\times P^{n_2})(x,y)\\
&= \sum_{z\in E} P^{n_1}(x,z)P^{n_2}(z,x)\\
&\geqslant P^{n_1}(x,a)P^{n_2}(a,x)
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 1.5.a on a est P^{n_1} réversible par rapport à π, donc

$$P^{n_1}(x,a) = \frac{\pi(a)}{\pi(x)}P^{n_1}(a,x)>0$$

Ainsi $P^{n_1+n_2}(x,y)>0$, et ça pour tout $(x,y)\in E^2$, donc par définition P est irréductible.

1.6. Pour toute fonction $f:E\to\mathbb{R}$ bornée et tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$\mathcal{E}_n(f)=\frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E^2}[f(x)-f(y)]^2\pi(x)P^n(x,y)$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}_n(f)=\langle f-P^n f,f\rangle_\pi$.

On a

$$\begin{aligned}
\langle f-P^n f,f\rangle_\pi &= \pi[(f-P^n f)f]\\
&= \sum_{x\in E}\pi(x)(f(x)-P^n f(x))f(x)\\
&= \sum_{x\in E}\pi(x)\left(f(x)-\sum_{y\in E}P^n(x,y)f(y)\right)f(x)
\end{aligned}$$

Montrons que la famille $(\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y))_{(x,y)\in E^2}$ est sommable

Puisque P est réversible par rapport à π, alors on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in E^2} |\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y)| &= \sum_{(x,y)\in E^2} |\pi(y)(f(y)-f(x))f(y)P^n(y,x)| \\
&= \sum_{y\in E}\pi(y)|f(y)|\sum_{x\in E}|f(y)-f(x)|P^n(y,x) \\
&\leqslant 2\|f\|_\infty\sum_{y\in E}\pi(y)|f(y)|\sum_{x\in E}P^n(y,x) \\
&= 2\|f\|_\infty\sum_{y\in E}\pi(y)|f(y)|
\end{aligned}$$

Car $\sum_{x\in E} P^n(y,x)=1$ pour tout $y\in E$, puisque P^n est une matrice de transition.
On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in E^2} |\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y)| &\leqslant 2\|f\|_\infty^2\sum_{y\in E}\pi(y) \\
&= 2\|f\|_\infty^2 \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Donc la famille $(\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y))_{(x,y)\in E^2}$ est sommable, et on a

$$\begin{aligned}
\langle f-P^nf,f\rangle_\pi &= \sum_{x\in E}\pi(x)\left(f(x)\sum_{y\in E}P^n(x,y)-\sum_{y\in E}P^n(x,y)f(y)\right)f(x) \qquad (*) \\
&= \sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y)
\end{aligned}$$

Et puisque P est réversible par rapport à π, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y) &= \sum_{(x,y)\in E^2}\pi(y)(f(y)-f(x))f(y)P^n(y,x) \\
&= \sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(y)-f(x))f(y)P^n(x,y)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(x)-f(y))f(x)P^n(x,y) \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(y)-f(x))f(y)P^n(x,y) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(x)^2 - 2f(y)f(x) + f(y)^2)P^n(x,y) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E^2}\pi(x)(f(x)-f(y))^2P^n(x,y) \\
&= \mathcal{E}_n(f)
\end{aligned}$$

(b) Montrer que si $Pf = f$, la fonction est f est constante.

Supposons que $Pf = f$, et montrons que f est constante.

Puisque $Pf = f$, alors par récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$, on a $P^k f = f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Et on a d'après la question précédente pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k(f) &= \langle f - P^k f, f \rangle_\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E^2} \pi(x)(f(x) - f(y))^2 P^k(x, y) = 0$

Or la somme est à termes positifs,

En particulier pour tout $(x, y) \in E^2$ $\pi(x)(f(x) - f(y))^2 P^k(x, y) = 0$

Et puisque on a l'existence d'un entier $n \geqslant 1$ pour lequel $P^n(a, x) > 0$, et $\pi(a) > 0$, alors en particulier pour $x = a$, et $k = n$, pour tout $y \in E$ $(f(x) - f(y))^2 = 0$.

Donc f est une fonction constante.

(c) Soit μ un élément de $\mathcal{P}(E)$ tel que $\mu P = \mu$. En posant $f(x) = \frac{\mu(x)}{\pi(x)}$, montrer que $Pf = f$, puis que $\mu = \pi$.

On a pour tout $x \in E$.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \sum_{y \in E} P(x, y) f(y) \\ &= \sum_{y \in E} P(x, y) \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \\ &= \sum_{y \in E} P(y, x) \frac{\mu(y)}{\pi(x)} \\ &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in E} P(y, x) \mu(y) \\ &= \frac{1}{\pi(x)} \mu P(x) \\ &= \frac{1}{\pi(x)} \mu(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a alors $Pf = f$,

Supposons que $\frac{\mu}{\pi}$ est bornée, Donc d'après la question précédente f est constante, posons pour tout $x \in E$, $f(x) = C^{\text{st}} \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\mu(x) = \pi(x) C^{\text{st}}$$

Et $1 = \sum_{x \in E} \mu(x) = C^{\text{st}} \sum_{x \in E} \pi(x) = C^{\text{st}}$, d'où $f(x) = \frac{\mu(x)}{\pi(x)} = 1$, pour tout $x \in E$.

D'où $\mu(x) = \pi(x)$, pour tout $x \in E$, ainsi $\pi = \mu$.

À partir de maintenant, on supposera également qu'il existe un élément b de E tel que $P(b, b) > 0$.

1.7. (a) Montrer que pour tous entiers positifs k, l, n, on a $P^n(b,b) > 0$ et

$$\boldsymbol{P^{k+n+l}(x,y) \geq P^k(x,b)P^n(b,b)P^l(b,y)} \textbf{ pour tout } \boldsymbol{(x,y) \in E^2}.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, qu'on a $P^n(b,b) > 0$.

Pour $n = 0$, on a $P^0(b,b) = 1 > 0$? Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P^n(b,b) > 0$, et montrons que $P^{n+1}(b,b) > 0$.

On a par positivité des termes:

$$\begin{aligned} P^{n+1}(b,b) &= P^n \times P(b,b) \\ &= \sum_{x \in E} P^n(b,x)P(x,b) \\ &\geqslant P^n(b,b)P(b,b) \\ &> 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Soient $k, l, n \in \mathbb{N}$, et soit $(x,y) \in E^2$, montrons que $P^{k+n+l}(x,y) \geq P^k(x,b)P^n(b,b)P^l(b,y)$

On a

$$\begin{aligned} P^{k+n+l}(x,y) &= \sum_{z \in E} \sum_{t \in E} P^k(x,t)P^n(t,z)P^l(z,y) \\ &\geqslant P^k(x,b)P^n(b,b)P^l(b,y) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(b) Montrer que P^2 est irréductible. On rappelle (cf. la question 5(a)) que P^2 est réversible par rapport à π.

On a d'après la question 1.5.d, P est irréductible, donc on a l'existence de $n_1, n_2 > 0$ tel que $P^{n_1}(b,x) > 0$ et $P^{n_2}(b,y) > 0$.

On a de plus $\pi(y), \pi(a) > 0$, donc via la question précédente, on a

$$\begin{aligned} (P^2)^{n_1+n_2}(x,y) &= P^{n_1+(n_1+n_2)+n_2}(x,y) \\ &\geqslant P^{n_1}(x,b)P^{n_1+n_2}(b,b)P^{n_2}(b,y) \\ &= \frac{\pi(b)}{\pi(x)} P^{n_1}(b,x)P^{n_1+n_2}(b,b)P^{n_2}(b,y) \\ &> 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) Montrer que si une fonction bornée $f\colon E \to \mathbb{R}$ vérifie $Pf = -f$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée tel que $Pf = -f$.

On a par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$, $P^n f = (-1)^n f$, en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P^{2n} f - f = 0$, ensuite en utilisant la question 1.6.a on a pour tout $n \geqslant 1$ $\mathcal{E}_{2n}(f) = 0$

Ainsi pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E^2} [f(x) - f(y)]^2 \pi(x) P^{2n}(x,y) = 0$$

Avec pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $[f(x) - f(y)]^2 \pi(x) P^{2n}(x, y) \geqslant 0$, donc pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $[f(x) - f(y)]^2 \pi(x) P^{2n}(x, y) = 0$ (✠)

Soit $(x, y) \in E^2$, on a montré dans la question précédente que P^2 est irréductible

Donc par définition, il existe $n_{x,b}, n_{b,y} \geqslant 1$ tel que $P^{n_{x,b}}(x, b) > 0$ et $P^{n_{b,y}}(b, y) > 0$

Or il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n_{x,b} + n_{b,y} + n_b$ soit pair, notons par $2k$ ce nombre.

On a via la question 1.7.a

$$P^{2k}(x, y) \geqslant P^{n_{x,b}}(x, b) P^{n_b}(b, b) P^{n_{b,y}}(b, y)$$

Or $P(b, b) > 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^n(b, b) \geqslant (P(b, b))^n > 0$. Par suite

$$P^{2k}(x, y) > 0$$

Ainsi via (✠), on a $[f(x) - f(y)]^2 \pi(x) P^{2k}(x, y) = 0$, avec $\pi(x), P^{2k}(x, y) > 0$

Donc $f(x) = f(y)$, ainsi f est constante.

Ainsi pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sum_{x \in E} P(x, y) f(y) \\ &= -f(x) \sum_{x \in E} P(x, y) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = 0$, et ça pour tout $x \in E$. D'où le résultat.

1.8. Dans cette question, on prend $E = \{1, \ldots, d\}$, où d est un entier. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ peut être alors vue comme un élément de $\mathbb{R}^d$.

(a) Montrer que $\langle ., . \rangle_\pi$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. On note $\|.\|_\pi$ la norme associée.

On a pour tout $f, g, h \in \mathbb{R}^d$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\pi &= \pi[fg] \\ &= \sum_{x \in E} \pi(x) f(x) g(x) \\ &= \sum_{x \in E} \pi(x) g(x) f(x) \\ &= \langle g, f \rangle_\pi \end{aligned}$$

Donc $\langle ., . \rangle_\pi$ est symétrique.

Montrons que $\langle ., . \rangle_\pi$ est bilinéaire:

On a

$$\begin{aligned} \langle f, g + \lambda h \rangle_\pi &= \pi[f(g + \lambda h)] \\ &= \sum_{x \in E} \pi(x) f(x) (g(x) + \lambda h(x)) \\ &= \sum_{x \in E} \pi(x) f(x) g(x) + \lambda \sum_{x \in E} \pi(x) f(x) h(x) \\ &= \langle f, g \rangle_\pi + \lambda \langle f, h \rangle_\pi \end{aligned}$$

Par symétrie, $\langle .,. \rangle_\pi$ est bilinéaire.
Il reste à montrer que $\langle .,. \rangle_\pi$ est définie, positif
On a pour f non nul, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle_\pi &= \pi[f^2] \\
&= \sum_{x \in E} \pi(x) f^2(x) \\
&= \sum_{x \in E \setminus \{x_0\}} \pi(x) f^2(x) + \pi(x_0) f^2(x_0) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Car $\pi(x_0) f^2(x_0) > 0$, et $\sum_{x \in E \setminus \{x_0\}} \pi(x) f^2(x) \geqslant 0$.
D'où le résultat.

(*b*) Montrer que l'application $f \longmapsto Pf$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ symétrique pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_\pi$.
Soit $f, g \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned}
P(f + \lambda g)(x) &= \sum_{y \in E} P(x,y)(f(y) + \lambda g(y)) \\
&= \sum_{y \in E} P(x,y) f(y) + \lambda \sum_{y \in E} P(x,y) g(y) \\
&= Pf(x) + \lambda Pg(x) \\
&= (Pf + \lambda Pg)(x)
\end{aligned}$$

Et ça pour tout $x \in E$, alors $P(f + \lambda g) = Pf + \lambda Pg$, donc $f \longmapsto Pf$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$.
Montrons qu'il est symétrique pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_\pi$
On a pour tout $f, g \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\langle Pf, g \rangle_\pi &= \pi[gPf] \\
&= \sum_{x \in E} \pi(x) g(x) Pf(x) \\
&= \sum_{x \in E} \pi(x) g(x) \sum_{y \in E} P(x,y) f(y) \\
&= \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \pi(x) P(x,y) g(x) f(y) \\
&= \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \pi(y) P(y,x) g(x) f(y) \\
&= \sum_{y \in E} f(y) \pi(y) \sum_{x \in E} P(y,x) g(x) \\
&= \sum_{y \in E} f(y) \pi(y) Pg(y) \\
&= \pi[fPg] \\
&= \langle f, Pg \rangle_\pi
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(*c*) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de P, alors λ est réelle et vérifie $-1 < \lambda \leqslant 1$.

Puisque $P \longmapsto Pf$ est symétrique pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_\pi$, alors P est une matrice réelle symétrique, donc d'après le théorème spectral, P est diagonalisable sur une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$ pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_\pi$.

Donc λ est réelle, il reste à vérifie que $-1 < \lambda \leqslant 1$

Soit $e \in \mathbb{R}^d$ un vecteur propre de P associée à λ, alors $Pe = \lambda e$

Notons $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$, et $e = (e_1, \ldots, e_d)$, on a alors pour tout $i \in [\![1, d]\!]$

$$\sum_{j=1}^{d} p_{i,j} e_j = \lambda e_j$$

Soit $i_0 \in [\![1, d]\!]$ qui vérifie $|e_{i_0}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} |e_i|$, puisque e est non nul, alors $|e_{i_0}| > 0$,

et on a

$$\begin{aligned}
|\lambda| &= \frac{1}{|e_{i_0}|} \left| \sum_{j=1}^{d} p_{i,j} e_j \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{d} p_{i,j} \frac{|e_j|}{|e_{i_0}|} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{d} p_{i,j} \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'après la question 1.7.c, $\lambda \neq 0$ (-1 n'est pas valeur propre de P, le seul vecteur f qui vérifie $Pf = -f$ est $f = 0$).

D'où $-1 < \lambda \leqslant 1$.

D'où le résultat.

(*d*) On note b_1 le vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont toutes les composantes valent 1. Montrer que b_1 est un vecteur propre de P associé à la valeur propre 1, qui est une valeur propre de multiplicité 1 pour P.

On a

$$\begin{aligned}
Pb_1 &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{y \in E} P(1, y) \\ . \\ . \\ . \\ \sum\limits_{y \in E} P(d, y) \end{pmatrix} \\
&= b_1
\end{aligned}$$

Ainsi b_1 est un vecteur propre de P associée à 1, de plus d'après la question 1.6.b, on a pour tout $f \in \mathbb{R}^d$ tel que $Pf = f$, alors f est constante donc, elle est proportionnelle à b_1.

D'où 1 est une valeur propre de multiplicité 1 pour P.

(e) Montrer qu'il existe $\boldsymbol{\lambda} \in [0, 1[$ tel que, pour tout $\boldsymbol{n} \geqslant 1$ et toute fonction $\boldsymbol{f} \colon \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$, on a

$$\|\boldsymbol{P^n f} - \boldsymbol{\pi}[\boldsymbol{f}]\boldsymbol{b_1}\|_{\boldsymbol{\pi}} \leqslant \boldsymbol{\lambda^n} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\pi}[\boldsymbol{f}]\boldsymbol{b_1}\|_{\boldsymbol{\pi}}$$

Si f est une fonction constante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, P^n f - \pi[f]b_1 = 0$ et $f - \pi[f]b_1 = 0$, donc tout $\lambda \in [0, 1[$ convient

Dans la suite on suppose que f est non constante.

Montrons d'abord que b_1 est un vecteur normal pour la norme $\|.\|_\pi$. Pour cela on a

$$\begin{aligned}
\|b_1\|_\pi^2 &= \langle b_1, b_1 \rangle_\pi \\
&= \pi[b_1 b_1] \\
&= \sum_{x \in E} \pi(x) b_1(x) b_1(x) \\
&= \sum_{x \in E} \pi(x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Complètant b_1 en une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle_\pi$ $(b_1, \ldots, b_d)$ formée par les vecteurs propres de P

On a l'existence de $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k b_k$

Notons $\lambda_k \in \mathbb{R}$ la valeur propre associée à b_k $(\lambda_1 = 1)$ $\forall k \in [\![1, d]\!]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\|P^n f - \pi[f]b_1\|_\pi^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{d} x_k P^n b_k - \pi[f]b_1 \right\|_\pi^2 \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{d} x_k \lambda_k^n b_k - \pi[f]b_1 \right\|_\pi^2 \\
&= \left\| (x_1 - \pi[f])b_1 + \sum_{k=2}^{d} x_k \lambda_k^n b_k \right\|_\pi^2 \\
&= (x_1 - \pi[f])^2 + \sum_{k=2}^{d} x_k^2 \lambda_k^{2n}
\end{aligned}$$

On définie la fonction $\gamma \colon \lambda \longmapsto \left((x_1 - \pi[f])^2 + \sum\limits_{k=2}^{d} x_k^2 \right) \lambda^{2n}$

γ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $(x_1 - \pi[f])^2 + \sum\limits_{k=2}^{d} x_k^2 > 0$, puisque f est non constante).

Et on a

$$\gamma(1) - \|P^n f - \pi[f] b_1\|_\pi^2 \;=\; \sum_{k=2}^{d} x_k^2 (1 - \lambda_k^{2^n})$$

Avec 1 est une valeur propre de multiplicité 1 de l'endomorphisme $f \longmapsto Pf$, donc d'après la question 1.8.c, on a pour tout $2 \leqslant k \leqslant d$: $-1 < \lambda_k < 1$,

Par suite $\sum\limits_{k=2}^{d} x_k^2 (1 - \lambda_k^{2^n}) \geqslant \min\limits_{2 \leqslant k \leqslant d} (1 - \lambda_k^{2^n}) \sum\limits_{k=2}^{d} x_k^2 > 0$, car f est non constante.

Ainsi $\gamma(1) > \|P^n f - \pi[f] b_1\|_\pi^2$, ainsi puisque γ est strictement croissante, et par caractèrisation de la borne inférieure, il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que $\gamma(\lambda) \geqslant \|P^n f - \pi[f] b_1\|_\pi^2$

Donc pour ce $\lambda \in [0, 1[$, on a

$$\left((x_1 - \pi[f])^2 + \sum_{k=2}^{d} x_k^2 \right) \lambda^{2n} \;\geqslant\; \|P^n f - \pi[f] b_1\|_\pi^2$$

Avec

$$(x_1 - \pi[f])^2 + \sum_{k=2}^{d} x_k^2 \;=\; \|f - \pi[f] b_1\|_\pi^2$$

Ainsi

$$\lambda^{2n} \|f - \pi[f] b_1\|_\pi^2 \geqslant \|P^n f - \pi[f] b_1\|_\pi^2$$

D'où

$$\lambda^n \|f - \pi[f] b_1\|_\pi \geqslant \|P^n f - \pi[f] b_1\|_\pi$$

(*f*) En déduire qu'il existe une constante $\boldsymbol{C}$ telle que

$$\boldsymbol{\forall n \geqslant 1 \sup_{x \in E} |\mu_n(x) - \pi(x)| \leqslant C \lambda^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et $x \in E$,

D'après la question précédente on a pour $f_x \colon y \longmapsto \mathbf{1}_{\boldsymbol{x=y}}\boldsymbol{(y)} = \begin{cases} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$\lambda^{2n} \|f_x - \pi[f_x] b_1\|_\pi^2 \geqslant \|P^n f_x - \pi[f_x] b_1\|_\pi^2$$

Avec:

$$\begin{aligned} \pi[f_x] &= \sum_{y \in E} \pi(y) f_x(y) \\ &= \pi(x) \end{aligned}$$

Avec b_1 a toutes les composantes valent 1.

Ainsi

$$\lambda^{2n} \|f_x - \pi(x)\|_\pi^2 \geqslant \|P^n f_x - \pi(x)\|_\pi^2$$

De plus

$$\begin{aligned}
\| f_x - \pi(x)\|_\pi^2 &= \langle f_x - \pi(x), f_x - \pi(x)\rangle_\pi \\
&= \pi[(f_x - \pi(x))^2] \\
&= \sum_{y\in E} \pi(y)(f_x - \pi(x))^2(y) \\
&= \sum_{y\in E} \pi(y)(f_x(y) - \pi(x))^2 \\
&= \sum_{y\in E} \pi(y)(f_x(y) - \pi(x))^2 \\
&= \sum_{\substack{y\in E\\ y\neq x}} (\pi(y))^3 + \pi(x)(1-\pi(x))^2 \\
&= \sum_{y\in E} (\pi(y))^3 + \pi(x) - 2(\pi(x))^2 \\
&\leqslant \sum_{y\in E} (\pi(y))^3 + 1
\end{aligned}$$

Posons $C^2 = \sum_{y\in E} (\pi(y))^3 + 1$

Et

$$\begin{aligned}
\|P^n f_x - \pi(x)\|_\pi^2 &= \langle P^n f_x - \pi(x), P^n f_x - \pi(x)\rangle_\pi \\
&= \pi[(P^n f_x - \pi(x))^2] \\
&= \sum_{y\in E} \pi(y)(P^n f_x - \pi(x))^2(y) \\
&= \sum_{y\in E} \pi(y)(P^n f_x(y) - \pi(x))^2 \\
&= \sum_{y\in E} \pi(y)\left(\sum_{z\in E} P^n(y,z) f_x(z) - \pi(x)\right)^2 \\
&= \sum_{y\in E} \pi(y)(P^n(y,x) - \pi(x))^2 \\
&\geqslant \left(\sum_{y\in E} \mu_0(y) P^n(y,x) - \pi(x)\right)^2 \\
&= |\mu_n(x) - \pi(x)|^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|\mu_n(x) - \pi(x)|^2 \leqslant C^2 \lambda^{2n}$$

Et ça pour tout $x \in E$, alors

$$\sup_{x\in E} |\mu_n(x) - \pi(x)| \leqslant C\lambda^n$$