Corrigé de l'épreuve mathématiques A
XLSR - Filière MP-MPI
2024.

par SABIR Ilyass, Ettousy Badr.

N.B : Si vous trouvez des erreurs de français ou de mathématiques, ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, n'hésitez pas à nous contacter, en envoyant un mail à : **ilyasssabir7@gmail.com** ou **badrettousy26@gmail.com**

15 avril 2024.

Pramière partie

1a. Montrons que $-M_0$ est diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de $-M_0$ est :

$$\begin{aligned}\chi_{-M_0}(X) &= \det(XI_n+M_0)\\ &= \begin{vmatrix} X & 1 & . & . & . & 1 & 1\\ 1 & X & & & & . & .\\ 1 & 1 & . & & & . & .\\ . & . & & . & & . & .\\ . & . & & & . & & \\ . & . & & & & X & 1\\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & X\end{vmatrix}\end{aligned}$$

On a, alors

$$\chi_{-M_0}(1)=0$$

Donc 1 est une valeur propre associée à $-M_0$, et le sous espace propre E_1 de $-M_0$ associé à la valeur propre 1 est :

$$E_1=\ker(-M_0-I_n)=\ker(M_0+I_n)$$

Soit $x=\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}x\in E_1 &\Leftrightarrow (M_0+I_n)x=0\\ &\Leftrightarrow x_1+\cdots+x_n=0\\ &\Leftrightarrow x\in H:=\left\{\begin{pmatrix}y_1\\ .\\ .\\ .\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n|y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{R}\,\text{tel que}\sum_{k=1}^n y_k=0\right\}\end{aligned}$$

Et ça pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, d'où

$$E_1=H$$

Or H est un hyperplan, donc $\dim E_1=\dim H=n-1$.

Ainsi 1 est une valeur propre de $-M_0$ d'ordre de multiplicité $n-1$.

Or la somme des valeurs propres est la trace de $-M_0$, en particulier $1-n$ est une valeur propre de $-M_0$.

Et pour tout $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{array}{rcl} x \in E_{1-n} & \Leftrightarrow & (-M_0+(n-1)I_n)x=0 \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in [\![1,n]\!]\ (n-1)\,x_i = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} x_k \\ & \Leftrightarrow & x_1=x_2=\cdots=x_n \\ & \Leftrightarrow & x \in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

Ainsi

$$E_{1-n}=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Puisque $\dim E_1+\dim E_{1-n}=n$, alors $-M_0$ est diagonalisable, de valeurs propres 1 et $1-n$.

1b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
On a par la définition du déterminant :

$$\det(xI_n+M_0)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(xI_n+M_0)_{\sigma(i),i}$$

Or pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$(xI_n+M_0)_{\sigma(i),i}=\begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(i)\neq i \\ x \text{ si } \sigma(i)=i \end{cases}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \det(xI_n+M_0) & = & \sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod\limits_{i\in\boldsymbol{\nu}(\sigma)} x \\ & = & \sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)} \end{array}$$

D'autre part, d'après la question précédente

$$\det(xI_n+M_0)=(x-1)^{n-1}(x-(1-n))$$

D'où

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)}=(x-1)^{n-1}(x+n-1)$$

2. On a d'après la question précédente,
Pour $x=1$, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma) \;=\; 0$$

D'autre part, en dérivant la fonction $x \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)}$, on a

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \boldsymbol{\nu}(\sigma) \geqslant 1}} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{\nu}(\sigma) x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)-1} = (n-1)(x-1)^{n-2}(x+n-1) + (x-1)^{n-1}$$

Au point $x=1$, on a :

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \boldsymbol{\nu}(\sigma) \geqslant 1}} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{\nu}(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geqslant 3 \\ 2 \text{ si } n = 2 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{\nu}(\sigma) &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \boldsymbol{\nu}(\sigma) \geqslant 1}} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{\nu}(\sigma) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \geqslant 3 \\ 2 \text{ si } n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^x \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) t^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)} \, dt = \int_0^x (t-1)^{n-1}(t+n-1) \, dt$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) t^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)} \, dt &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \int_0^x t^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)} \, dt \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{1+\boldsymbol{\nu}(\sigma)} x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)+1} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \int_0^x (t-1)^{n-1}(t+n-1) \, dt &= \int_0^x (t-1)^n + n(t-1)^{n-1} \, dt \\ &= \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + (x-1)^n + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{1+\boldsymbol{\nu}(\sigma)} x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + (x-1)^n + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$$

Au point $x=1$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{1+\boldsymbol{\nu}(\sigma)} = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} \varepsilon(\sigma) \\ &= \operatorname{Card}\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} - \operatorname{Card}\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0$.

Par suite

$$\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathcal{S}_n\colon \varepsilon(\sigma)=1\}=\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathcal{S}_n\colon \varepsilon(\sigma)=-1\}$$

D'où la probabilité qu'une permutation de $\mathcal{S}_n$ tirée uniformément au hasard soit de signature prescite est $\frac{1}{2}$.

4. Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$.
On a $\sigma\in\mathcal{D}_n$ si et seulement si $\boldsymbol{\nu}(\sigma)=0$
Et

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n}\varepsilon(\sigma)+\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n\setminus\mathcal{D}_n}\varepsilon(\sigma)x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)}$$

Au point $x=0$, on a

$$\begin{aligned}\left.\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)}\right|_{x=0} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n}\varepsilon(\sigma)\\ &= \operatorname{Card}\{\sigma\in\mathcal{D}_n\colon \varepsilon(\sigma)=1\}-\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathcal{D}_n\colon \varepsilon(\sigma)=-1\}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\left.\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)x^{\boldsymbol{\nu}(\sigma)}\right|_{x=0}=(x-1)^{n-1}(x+n-1)|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

Ainsi

$$\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathcal{D}_n\colon \varepsilon(\sigma)=1\}-\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathcal{D}_n\colon \varepsilon(\sigma)=-1\}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

D'où le résultat.

5a. Soit $m\in\mathbb{N}$, On a $(1,X,\ldots,X^m)$ (resp. $(1,(X-1),\ldots,(X-1)^m)$) est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré, donc elle est libre avec le cardinal égal à $m+1=\dim(\mathbb{R}_m[X])$.
Ainsi, elle est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Il suffit de montrer que M est la matrice de passage de la base $(1,(X-1),\ldots,(X-1)^m)$ à la base $(1,X,\ldots,X^m)$.
On a pour tout $k\in[\![0,m]\!]$

$$X^k=((X-1)+1)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(X-1)^i$$

D'où le résultat.

5c. Puisque M est une matrice de passage, alors elle est inversible, et son inverse M^{-1} est la matrice de passage de la base $(1,X,\ldots,X^m)$ à la base $(1,(X-1),\ldots,(X-1)^m)$.
On a pour tout $k\in[\![0,m]\!]$

$$(X-1)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}X^i$$

Doù

$$M^{-1}=\left(\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\right)_{(i,k)\in[\![1,n]\!]^2}$$

5d. Soient $(u_0,\ldots,u_m),(v_0,\ldots,v_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$, tel que

$$\forall k\leqslant m, u_k=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}v_l$$

Montrons que pour tout $k \leqslant m$, on a

$$v_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} u_l$$

On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{l=0}^{m} \binom{0}{l} v_l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} v_l \end{pmatrix} \\
&= M \begin{pmatrix} v_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{l=0}^{m} (-1)^{0-l} \binom{0}{l} u_l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{m} (-1)^{m-l} \binom{m}{l} u_l \end{pmatrix}$$

D'où le résultat.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$,
Notons pour tout $l \in [\![0, k]\!]$ $\mathcal{F}_l$: l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_k$ ayant exactement l points fixes.
On a $\{\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_k\}$ forme une partition de $\mathcal{S}_k$, en particulier

$$\sum_{l=0}^{k} \mathrm{Card}(\mathcal{F}_l) = k!$$

D'autre part

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}_l) = \binom{k}{l} \mathrm{Card}(\mathcal{D}_k) = \binom{k}{l} D_{l-k} = \binom{k}{l-k} D_{l-k}$$

Avec la convention $D_0 = \mathrm{Card}(\mathcal{D}_0) = 1$.
D'où

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} D_k = k!$$

En utilisant la question précédente, on a

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

7a. Soit $n \geqslant 2$, on a

$$Y_n(\mathcal{D}_n) = \{-1, 1\}$$

Et pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on a

$$\mathbb{P}(Y_n = \varepsilon) = \frac{\text{card}\{\sigma \in \mathcal{D}_n : \varepsilon(\sigma) = \varepsilon\}}{D_n}$$

Or d'après la question 4, on a

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n}$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}$$

Et

$$\mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}$$

D'où

$$\mathbb{P}(Y_n = \varepsilon) = \frac{1}{2} + \varepsilon \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}$$

7b. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on a pour tout $n \geqslant 2$

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{e}$$

Donc

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2en!}$$

Avec

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2en!} = 0$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n} = 0$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon)$ existe et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon) = \frac{1}{2}$$

8a. On a

$$Z_n(\mathcal{S}_n) = [\![0, n]\!]$$

Et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = k) &= \frac{\text{Card}\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \boldsymbol{\nu}(\sigma) = k\}}{n!} \\ &= \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}\end{aligned}$$

8b. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) \;=\; \frac{1}{e\,k!}$$

8c. Le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire est l'espérence de Z_n.
Et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n] &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Z_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(-1)^l}{l!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(-1)^l}{l!}
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} k\mathbb{P}(Z_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{e\,(k-1)!} \text{ si } k > 0 \\ 0 \text{ si } k = 0 \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(Z_n = k)\mathbf{1}_{[n,+\infty[}(k)$$

La somme est fini à termes positifs, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(Z_n = k)\mathbf{1}_{[n,+\infty[}(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} k\mathbb{P}(Z_n = k)\mathbf{1}_{[n,+\infty[}(k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{e\,(k-1)!} = 1$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n] = 1$$

9. On a par calcul simple :

$$\begin{cases} \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_2}\omega(\sigma) = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_3}\omega(\sigma) = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{4!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4}\omega(\sigma) = \frac{50}{24} \end{cases}$$

10. Soit $n \geqslant 2$, on a $s(n,n)$ est le nombre de permutations σ de $\mathcal{S}_n$ tel que $\omega(\sigma) = n$, donc $l_{\omega(\sigma)} = 1$.
D'où $\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_n}$, par suite :

$$s(n,n) \;=\; 1$$

Et $s(n,1)$ est le nombre de permutations σ de $\mathcal{S}_n$ tel que $\omega(\sigma) = 1$, c'est à dire $l_{\omega(\sigma)} = n$.
Il existe $(n-1)!$ permutations σ de $\mathcal{S}_n$ tel que $\omega(\sigma) = 1$ (cycle de longueur n)
D'où

$$s(n,1) = (n-1)!$$

Pour tout $k\in[\![2,n-1]\!]$, on a $s(n,k)$ est le nombre de permutations σ de $\mathcal{S}_n$ tel que $\omega(\sigma)=k$
Montrons que

$$s(n,k) \;=\; s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k)$$

Si $\omega(\sigma)=k$ et sans déplacer n, donc n est fixe par σ, alors la restriction de σ à $\mathcal{S}_{n-1}$ vérifie $\omega(\sigma')=k-1$, donc il y a $s(n-1,k-1)$ permutations qui vérifie cette conditions.

Si $\omega(\sigma)=k$ par déplacement de n, alors il y a $(n-1)$ possibilités où on peut envoyer $\sigma(n)$, après avoir choisi la position de n, les $n-1$ autres éléments forment sont isomorphe à une permutation σ' de $\mathcal{S}_{n-1}$ tel que $\omega(\sigma')=k$.

Donc il y a $(n-1)s(n-1,k)$ permutations qui vérifie cette conditions.

D'où

$$s(n,k) \;=\; s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k)$$

11. Soit $x\in\mathbb{R}$, Posons pour tout $j\in\mathbb{N}^*$

$$\kappa_j(x)=\sum_{k=1}^{j}s(j,k)x^k$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\kappa_n(x) &= S(n,n)x^n+S(n,1)x+\sum_{k=2}^{n-1}(s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k))x^k\\
&= x^n+(n-1)!x+\sum_{k=2}^{n-1}s(n-1,k-1)x^k+(n-1)\sum_{k=2}^{n-1}s(n-1,k)x^k\\
&= x^n+(n-1)!x+x\sum_{k=1}^{n-2}s(n-1,k)x^k+(n-1)\sum_{k=2}^{n-1}s(n-1,k)x^k\\
&= x^n+(n-1)!x+x(\kappa_{n-1}(x)-s(n-1,n-1)x^{n-1})+(n-1)(\kappa_{n-1}(x)-s(n-1,1)x)\\
&= (x+n-1)\kappa_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Par téléscopage, on a

$$\kappa_n(x)=\kappa_1(x)\prod_{i=2}^{n}(x+i-1)=x\prod_{i=1}^{n-1}(x+i)=\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$$

12. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n] &= \sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X_n=k)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k\,\mathrm{Card}\{\sigma\in\mathcal{S}_n\colon\omega(\sigma)=k\}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}ks(n,k)
\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n}ks(n,k)x^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n-1}(x+i)$$

Donc pour $x=1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\,s(n,k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n-1}(1+i)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k+1}\\ &= n!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Par suite

$$\mathbb{E}[X_n]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Alors

$$\mathbb{E}[X_n]\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

13a. On a d'après la question 11, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,s(n,k)x^{k-2}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k,j}}^{n-1}(x+i)$$

En particulier

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,s(n,k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k,j}}^{n-1}(1+i)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}\frac{n!}{(k+1)\,(j+1)}\\ &= n!\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\,(j+1)}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &= n!\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{kj}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

13b. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k^2\,s(n,k) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,s(n,k)+\sum_{k=1}^{n} k\,s(n,k)\\ &= \mathbb{E}[X_n]+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{kj}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

14a. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\omega(\sigma)^2 &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k^2 s(n,k)\\ &= \mathbb{E}[X_n]+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{kj}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{kj} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2+\gamma^2+O\left(\frac{1}{n}\right)^2+2\gamma\ln(n)+2O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)+2\gamma O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On a l'existence des suites $(\varepsilon_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ bornées pour tout $j=1,2,3$ tel que

$$\begin{cases} O\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{\varepsilon_{1,n}}{n^2}\\ O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\varepsilon_{2,n}}{n}\\ O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)=\frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_{3,n}\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{kj} &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2+\gamma^2+2\gamma\ln(n)+\frac{\varepsilon_{1,n}}{n^2}+2\frac{\varepsilon_{2,n}}{n}+2\frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_{3,n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2+\gamma^2+2\gamma\ln(n)+\frac{\ln(n)}{n}\left(\frac{\varepsilon_{1,n}}{n\ln(n)}+2\frac{\varepsilon_{2,n}}{\ln(n)}+2\varepsilon_{3,n}\right)\end{aligned}$$

Avec $\left(\frac{\varepsilon_{1,n}}{n\ln(n)}+2\frac{\varepsilon_{2,n}}{\ln(n)}+2\varepsilon_{3,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Alors

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{kj}\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)^2+\gamma^2+2\gamma\ln(n)+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n] &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{6}+o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\omega(\sigma)^2\underset{n\to+\infty}{=}(2\gamma+1)\ln(n)+\gamma^2+\gamma-\frac{\pi^2}{6}+\ln(n)^2+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

D'où

$$c=\gamma^2+\gamma-\frac{\pi^2}{6}$$

14b. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2 &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\omega(\sigma)^2-2\frac{\ln(n)}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\omega(\sigma)+\ln(n)^2\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\omega(\sigma)^2-2\ln(n)\mathbb{E}[X_n]+\ln(n)^2\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)
\end{aligned}$$

15. On a d'après l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)) &\leqslant \frac{\mathbb{E}[(X_n-\ln(n))^2]}{\varepsilon^2\ln(n)^2}\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2\ln(n)^2}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\varepsilon^2\ln(n)}\left(1+\frac{c}{\ln(n)}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\varepsilon^2\ln(n)}(1+o(1))
\end{aligned}$$

Or, il existe un $C>0$ tel que

$$1+o(1)\leqslant C$$

D'où

$$\mathbb{P}(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n))\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}$$

Deuxième partie

16. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}a_k b(k) &= \sum_{k=2}^{n}(A(k)-A(k-1))b(k)\\
&= \sum_{k=2}^{n}A(k)b(k)-\sum_{k=3}^{n}A(k-1)b(k)\\
&= \sum_{k=2}^{n}A(k)b(k)-\sum_{k=2}^{n-1}A(k)b(k+1)\\
&= A(n)b(n)+\sum_{k=2}^{n-1}A(k)(b(k)-b(k+1))\\
&= A(n)b(n)-\sum_{k=2}^{n-1}A(k)\int_k^{k+1}b'(t)\,dt\\
&= A(n)b(n)-\sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1}A(k)b'(t)\,dt
\end{aligned}$$

Or pour tout $k\in[\![2,n-1]\!]$ et pour tout $t\in[k,k+1]$, on a

$$A(t)=A(k)$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) &= A(n)b(n) - \sum_{k=2}^{n-1}\int_{k}^{k+1} A(t)b'(t)\,dt \\ &= A(n)b(n) - \int_{2}^{n} A(t)b'(t)\,dt\end{aligned}$$

17a.

Pour $n=1$

$$\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} p=1$$

Pour $n=2$

$$\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} p=2$$

Pour $n=3$

$$\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} p=6$$

17b. Si n est pair et $n>2$, alors n n'est pas premier, par suite

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} p &= \prod_{\substack{p\leqslant n-1\\ p\,\text{premier}}} p \\ &\leqslant 4^{n-1} \\ &\leqslant 4^{n}\end{aligned}$$

17c. Soit $n=2m+1$ avec $m\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}m!\binom{2m+1}{m} &= \prod_{k=m+1}^{2m+1} k \\ &= \prod_{\substack{m+1\leqslant k\leqslant 2m+1\\ k n'\text{est pas premier}}} k \times \prod_{\substack{m+1\leqslant p\leqslant 2m+1\\ p\,\text{premier}}} p\end{aligned}$$

D'où

$$\prod_{\substack{m+1\leqslant p\leqslant 2m+1\\ p\,\text{premier}}} p\,\text{divise}\, m!\binom{2m+1}{m}$$

Or pour tout p premier tel que $m+1\leqslant p\leqslant 2m+1$, on a

$$p\wedge m!=1$$

Donc

$$\prod_{\substack{m+1\leqslant p\leqslant 2m+1\\ p\,\text{premier}}} p\wedge m!=1$$

Ainsi

$$\prod_{\substack{m+1\leqslant p\leqslant 2m+1\\ p\,\text{premier}}} p\,\text{divise}\binom{2m+1}{m}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\binom{2m+1}{m} &= \frac{1}{2}\left[\binom{2m+1}{m}+\binom{2m+1}{m+1}\right]\\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}\\ &= \frac{1}{2}\times 2^{2m+1}\\ &= 4^m\end{aligned}$$

17d. On a d'après ce qui précède

$$\prod_{\substack{m+1\leqslant p\leqslant 2m+1\\ p\,\text{premier}}} p\,\text{divise}\binom{2m+1}{m}$$

Et

$$\binom{2m+1}{m}\leqslant 4^m$$

Donc

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{m+1\leqslant p\leqslant 2m+1\\ p\,\text{premier}}} p &\leqslant \binom{2m+1}{m}\\ &\leqslant 4^m\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} p &= \prod_{\substack{p\leqslant m\\ p\,\text{premier}}} p\times\prod_{\substack{m+1\leqslant p\leqslant 2m+1\\ p\,\text{premier}}} p\\ &\leqslant 4^m\times 4^m\\ &\leqslant 4^{2m+1}\\ &= 4^n\end{aligned}$$

D'où par récurrence forte, pour tout $n\geqslant 1$

$$\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} p\leqslant 4^n$$

18. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et p un nombre premier
On a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_p(n!) &= \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\nu}_p(k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{+\infty}\delta_{j,k}\end{aligned}$$

Avec pour tout $j,k\in\mathbb{N}$

$$\delta_{j,k}:=\begin{cases}1\,\text{si}\,p^j\,\text{divise}\,k\\ 0\,\text{sinon}\end{cases}$$

Or la somme $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\delta_{j,k}$ est fini, alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_p(n!) &= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_{j,k}\\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}\text{Card}\{k\in[\![1,n]\!], kp^j\leqslant n\}\\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}E\left(\frac{n}{p^j}\right)\end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{n}{p}-1\leqslant E\left(\frac{n}{p}\right)\leqslant \ \boldsymbol{\nu}_p(n!)=\sum_{j=1}^{+\infty}E\left(\frac{n}{p^j}\right)\ \leqslant\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{n}{p^j}=\frac{n}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}$$

D'où le résultat.

19a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

On a la fonction $t\longmapsto\ln(t)$ est croissante, et continue sur $[1,+\infty[$, donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln(t)dt\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)$$

Avec

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln(t)dt=\int_1^n\ln(t)dt=n\ln(n)-n+1$$

Donc

$$n\ln(n)-n+1\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\leqslant n\ln(n)+\ln(n)-n+1$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\underset{n\to+\infty}{=}n\ln(n)-n+O(\ln(n))$$

19b. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique et par définition de la valuation, on a

$$n!=\prod_{p\,\text{premier}}p^{\boldsymbol{\nu}_p(n!)}$$

Avec pour tout $p>n$ premier $v_p(n!)=0$ (car $p\wedge n!=1$).

D'où

$$n!=\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}}p^{\boldsymbol{\nu}_p(n!)}$$

Par suite

$$\ln(n!)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}}\boldsymbol{\nu}_p(n!)\ln(p)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}}\boldsymbol{\nu}_p(n!)\ln(p) &\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}\right)\ln(p)\\ &\leqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}}\frac{\ln(p)}{p}+n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \boldsymbol{\nu}_p(n!)\ln(p) &\geqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \left(\frac{n}{p}-1\right)\ln(p)\\
&\geqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \ln(p)\\
&= n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln\left(\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} p\right)\\
&\geqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n\ln(4)
\end{aligned}$$

D'où

$$n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n\ln(4) \leqslant \ln(n!) \leqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$$

19c. On a

$$\frac{\ln(k)}{k(k-1)} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

D'où par la somme de Reimman, la série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge.

19d. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$$

On a d'après la formule de Stirling

$$\frac{\ln(n!)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1)$$

Avec $\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$ converge car $\sum_{k\geqslant 2}\frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge.

D'où

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1)$$

20a. Soit $n\geqslant 2$,

Pour

$$b\colon t\in[2,+\infty[\longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$$

et

$$A\colon t\in[2,+\infty[\longmapsto \sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = \sum_{2\leqslant k\leqslant t} \frac{\ln(k)}{k}(\omega(k)-\omega(k-1))$$

On a d'après la question 16, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \frac{\ln(k)}{k}(\omega(k)-\omega(k-1))\frac{1}{\ln(k)} = \frac{1}{\ln(n)}(R(n)+\ln(n)) + \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^2}(R(t)+\ln(t))\,dt$$

Par suite

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{1}{p} \;=\; 1+\frac{R(n)}{\ln(n)}+\ln_2(n)-\ln_2(2)+\int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,dt$$

20b. On a la fonction $t\longmapsto \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est continue par morceaux sur $t\in[2,+\infty[$

De plus, pour tout $t\in[2,+\infty[$:

$$\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} \;=\; \frac{1}{t(\ln(t))^2}\left(\sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p}\right)-\frac{1}{t\ln(t)}$$

Or, d'après la question 19.d, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} &= \sum_{\substack{p\leqslant E(t)\\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p}\\ &\underset{t\to+\infty}{=} \ln(E(t))+O(1)\\ &\underset{t\to+\infty}{=} \ln(t)+O(1)\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} &\underset{t\to+\infty}{=} \frac{\ln(t)+O(1)}{t(\ln(t))^2}-\frac{1}{t\ln(t)}\\ &\underset{t\to+\infty}{=} \frac{O(1)}{t(\ln(t))^2}\\ &\underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t(\ln(t))^2}\right)\end{aligned}$$

Puisque pour tout $t\geqslant 2$

$$\int_2^t \frac{du}{u(\ln(u))^2} \;=\; \frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(t)}$$

Donc $t\longmapsto \int_2^t \frac{du}{u(\ln(u))^2}$ admet une limite en $+\infty$.

En particulier $t\longmapsto \int_2^t \frac{R(u)}{u(\ln(u))^2}du$ est intégrable.

20c. On a d'après la question 20.a

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\,\text{premier}}} \frac{1}{p} \;=\; 1+\frac{R(n)}{\ln(n)}+\ln_2(n)-\ln_2(2)+\int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,dt$$

Or, d'après la question précédente

$$\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t(\ln(t))^2}\right)$$

Et

$$\int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

Alors

$$\int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

Et

$$\begin{aligned} R(n) &= \sum_{\substack{p\leqslant t \\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(t) \\ &= \sum_{\substack{p\leqslant E(t) \\ p\,\text{premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(t) \\ &\underset{t\to+\infty}{=} \ln(E(t)) - \ln(t) + O(1) \\ &\underset{t\to+\infty}{=} O(1) \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\,\text{premier}}} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln_2(n) + 1 - \ln_2(2) + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

D'où le résultat avec $c_1 = 1 - \ln_2(2)$.

21a. soit $x \in [1, +\infty[$ et $q \in \mathbb{N}^*$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] \colon n \equiv 0 (\operatorname{mod} q)\} &= \operatorname{Card}\left\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] \colon \frac{n}{q} \in \mathbb{N}\right\} \\ &= E\left(\frac{x}{q}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\left|\operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] \colon n \equiv 0 (\operatorname{mod} q)\} - \frac{x}{q}\right| \leqslant 1$$

D'où le résultat.

21b. On a via la question 16

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(x)} \sum_{2\leqslant n\leqslant x} \omega(n) &= \sum_{2\leqslant n\leqslant x} \frac{(\omega(n) - \omega(n-1))}{n} - \int_2^{E(x)} \frac{\sum_{2\leqslant n\leqslant t} \omega(n)}{t^2} dt \\ &= \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\,\text{premier}}} \frac{1}{p} - \int_2^{E(x)} \frac{1}{t^2} \sum_{2\leqslant n\leqslant t} \omega(n) dt \\ &\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\,\text{premier}}} \frac{1}{p} - \int_2^{E(x)} \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\,\text{premier}}} \frac{1}{p} - \ln(E(x)) + \ln(2) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(E(x)) + 1 + \ln(2) - \ln_2(2) + O\left(\frac{1}{\ln(E(x))}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x) + O(1) \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{x}\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\omega(n)=\frac{E(x)}{x}\frac{1}{E(x)}\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\omega(n)\underset{x\to+\infty}{=}\ln_2(x)+O(1)$$

22a. On a pour tout $x\geqslant 2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 &= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2-2\frac{\ln_2(x)}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)+\frac{E(x)}{x}(\ln_2(x))^2\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2-2(\ln_2(x))^2+O(\ln_2(x))+(\ln_2(x))^2\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2-(\ln_2(x))^2+O(\ln_2(x))\end{aligned}$$

22b. Soit $x\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 &= \sum_{n\leqslant x}\Bigg(\sum_{\substack{p\mid n\\ p\,\text{premier}}}1\Bigg)^2\\ &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p_1\mid n\\ p_1\,\text{premier}}}\sum_{\substack{p_2\mid n\\ p_2\,\text{premier}}}1\\ &= \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1\,\text{premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2\,\text{premier}}}\Bigg(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_1\mid n\,\text{et}\,p_2\mid n}}1\Bigg)\\ &= \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1\,\text{premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2\,\text{premier}}}\mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*\colon n\leqslant \mathrm{xp_1}\mid n\ \text{ et }\ p_2\mid n\}\end{aligned}$$

22c. Pour tout $x\geqslant 2$, on a :

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\,\text{premiers}}}\mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*,n\leqslant x,p_1\mid n\ \text{ et }\ p_2\mid n\} = \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\,\text{premiers}}}\mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*\colon n\leqslant x,p_1p_2\mid n\}$$

Or d'après la question 21.a , on a pour tous $p_1\neq p_2$ premiers

$$\mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*,n\leqslant x,p_1p_2\mid n\}-\frac{x}{p_1p_2}\,\text{est born}\acute{e}e$$

Donc

$$\mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*,n\leqslant x,p_1p_2\mid n\}\underset{x\to+\infty}{=}\frac{x}{p_1p_2}+O(1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\,\text{premiers}}}\mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*\colon n\leqslant x,p_1\mid n,p_2\mid n\} &\underset{x\to+\infty}{=} \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\,\text{premiers}}}\frac{x}{p_1p_2}+O(1)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\,\text{premiers}}}\frac{x}{p_1p_2}+\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\,\text{premiers}}}O(1)\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\,\text{premiers}}}1 &\underset{x\to+\infty}{=} \sum_{p\leqslant x}1\\ &\underset{x\to+\infty}{=} O(\ln_2(x))(\mathrm{cf}\,20.a)\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{premiers}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*\colon n\leqslant x,\, p_1|n,\, p_2|n\} = \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} + O(\ln_2(x))$$

Or, puisque la série $\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p}$ diverge, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} &\underset{x\to+\infty}{=} \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{premiers}}} \frac{x}{p_1p_2}\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1p_2 \text{premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} - x\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\,\text{premier}}}\frac{1}{p^2}\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\,\text{premier}}}\frac{1}{p}\right)^2 - xO(1)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(\ln_2(E(x)) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(E(x))}\right)\right)^2 - O(x)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x(\ln_2(x))^2 + O(x\ln_2(x))
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{premiers}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*, n\leqslant x, p_1|n \text{ et } p_2|n\} - x(\ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} O(x\ln_2(x))$$

22d. On a d'après ce qui précède, pour tout $x\geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - (\ln_2(x))^2 + O(\ln_2(x))\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1\,\text{premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2\,\text{premier}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*\colon n\leqslant x,\, p_1|n \text{ et } p_2|n\} - (\ln_2(x))^2 +\\
&\qquad O(\ln_2(x))\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{premiers}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*\colon n\leqslant x,\, p_1|n \text{ et } p_2|n\}\\
&\qquad + \frac{1}{x}\sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1\,\text{premiers}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^*\colon n\leqslant x,\, p_1|n\} - (\ln_2(x))^2 + O(\ln_2(x))\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x)) + \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\,\text{premier}}}\frac{x}{p} - (\ln_2(x))^2 + O(\ln_2(x))\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) + O(\ln_2(x))\\
&\underset{x\to+\infty}{=} O(\ln_2(x))
\end{aligned}$$

23. On pose

$$\varphi = \left\{n\geqslant 3\colon \left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right| \geqslant (\ln_2(n))^{1/4}\right\}$$

Montrons que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{Card}\{n\leqslant x : n\in\varphi\}=0$$

On a pour tout x assez grand,

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\{\varphi\cap[1,x]\} &= \mathrm{Card}\{\varphi\cap[\sqrt{x},x]\}+\mathrm{Card}\{\varphi\cap[1,\sqrt{x}[\}\\ &= \mathrm{Card}\{\varphi\cap[\sqrt{x},x]\}+O(\sqrt{x})\end{aligned}$$

On a pour tout $n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]$

$$\frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}\geqslant(\ln_2(n))^{1/2}\ \text{ et }\ x\geqslant n\geqslant\sqrt{x}$$

Et

$$\begin{aligned}\frac{(\omega(n)-\ln_2(x))^2}{\ln_2(n)} &= \frac{(\omega(n)-\ln_2(n)+\ln_2(n)-\ln_2(x))^2}{\ln_2(n)}\\ &= \frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}+\frac{(\ln_2(x)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}+2\frac{(\omega(n)-\ln_2(n))(\ln_2(x)-\ln_2(n))}{\ln_2(n)}\end{aligned}$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\omega(n)-\ln_2(x))^2}{\ln_2(n)} &= \sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}+\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\ln_2(x)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}+\\ & \quad 2\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{((\omega(n)-\ln_2(n)))(\ln_2(x)-\ln_2(n))}{\ln_2(n)}\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\ln_2(x)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln_2(x)}o(1)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{\ln_2(x)}o(1)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{((\omega(n)-\ln_2(n)))(\ln_2(x)-\ln_2(n))}{\ln_2(n)} &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} \frac{o(1)}{\ln_2(\sqrt{x})}\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}(\omega(n)-\ln_2(n))\\ &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} \frac{o(1)}{\ln_2(x)}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)-\ln_2(n)-\frac{o(1)}{\ln_2(x)}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\omega(n)-\\ &\quad \ln_2(n)\\ &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} \frac{o(1)}{\ln_2(x)}(\ln_2(x)-\ln_2(\sqrt{x})+O(1))\\ &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} \frac{o(1)}{\ln_2(x)}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} &\leqslant \sum_{n\in[\sqrt{x},x]}\frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}\\ &\leqslant \frac{1}{\ln_2(\sqrt{x})}\left(\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(n))^2-\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}(\omega(n)-\ln_2(n))^2\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} xO(1)-\sqrt{x}O(1)\\ &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} xO(1)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\omega(n)-\ln_2(x))^2}{\ln_2(n)} &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} \frac{x}{\ln_2(x)}o(1)+\frac{o(1)}{\ln_2(x)}+xO(1)\\ &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} xO(1)\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\omega(n)-\ln_2(x))^2}{\ln_2(n)}\geqslant\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}(\ln_2(n))^{1/2}\geqslant\mathrm{Card}(\varphi\cap[\sqrt{x},x])(\ln_2(\sqrt{x}))^{1/2}$$

Par suite

$$\begin{aligned}0\leqslant\frac{1}{x}\mathrm{Card}(\varphi\cap[\sqrt{x},x]) &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} \frac{1}{x(\ln_2(\sqrt{x}))^{1/2}}\sum_{n\in\varphi\cap[\sqrt{x},x]}\frac{(\omega(n)-\ln_2(x))^2}{\ln_2(n)}\\ &\underset{x\to+\infty}{\leqslant} \frac{O(1)}{(\ln_2(\sqrt{x}))^{1/2}}\end{aligned}$$

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{O(1)}{(\ln_2(\sqrt{x}))^{1/2}}=0$. alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{Card}(\varphi\cap[\sqrt{x},x])=0$

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{Card}(\varphi\cap[0,x])=0$

D'où le résultat.