CORRECTION DES OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MAROC-2017

NIVEAU : PREMIÈRE ANNÉE BAC SC MATHS

PAR SABIR ILYASS

✠✠✠✠✠✠

N.B : $*$ Si vous trouvez des erreurs de Francais ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à ilyasssabir7@gmail.com

REMARQUE : les solutions proposées représentent des solutions personnelles et non des solutions officielles

✠✠✠✠✠✠

« JE SAIS QUE JE NE SAIS RIEN » SOCRATE.

Exercice 1.

Pour tout entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ deux $-$ à $-$ deux distincts de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2017\}$ on pose:

$$N = (a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_{2017} - 1)$$

1.Montrer que l'entier N est pair.

2.Montrer que:

$$\sum_{i=1}^{2017} \frac{a_i^2 - i^2}{i} \geqslant 0$$

Solution.

1. Montrons que N est pair.

le $r$ésultat de l'exercice reste vrai si on remplace 2017 par n'importe quel entier impair $n \geqslant 1$,

On travaille dans le cas gé$n$éral , et on considère un entier n, $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ des entiers deux $-$ à $-$ deux distincts de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ on pose:

$$N_n = (a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_{2n+1} - 1)$$

En particulier $N_{2017} = N$

Montrons que pour tout $n \geqslant 0$ N_{2n+1} est pair.

On pose $A_n = \{i \in [\![1, 2n-1]\!], a_i - i \text{ est impair}\}$;

Puisque, il existe n (resp. $n+1$)nombres pairs (resp. impairs)parmi $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ (✠) alors $A \subsetneq [\![1, 2n+1]\!]$

En effet, si $A = [\![1, 2n+1]\!]$, alors pour tout $n \in [\![1, 2n+1]\!]$ on a a_i et i n'ont pas la $m$ême parité

En particulier $\forall i \in [\![0, n]\!]$ a_{2i+1} est pair absurde avec (✠)

d'où il existe $i_0 \in [\![1, 2n+1]\!]$ tel que $a_i - i$ est pair

Donc $N_n = \prod_{i=1}^{n} (a_i - i) = (a_{i_n} - i_n) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_n}}^{n} (a_i - i)$ est pair.

Remarque:

$\rightarrow$pour tout $n \geqslant 2$, l'entier N_n peut être positif , $n$égatif ou nul , par exemple pour $n = 6$ on a

♣ pour $a_1 = 1$ et $a_2, \ldots, a_6 \in \{2, \ldots, 6\}$: $N_6 = 0$,

♣ pour $a_i = 6 - i$, $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ on a $N_6 = (6-1)(5-2)(4-3)(3-4)(2-5)(1-6) = -225 < 0$

♣ pour $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=4$, $a_4=5$, $a_5=3$ et $a_6=1$ on a:

$$N_6=(2-1)(1-2)(4-3)(5-4)(6-5)(3-6)=3>0$$

$\rightarrow$Si n est pair , on ne peut rien dire sur la parité de N_n comme dans l'exemple préc$\acute{e}$dente , on remarque que:

♣ pour $a_1=1$ et $a_2,\ldots,a_6\in\{2,\ldots,6\}$: $N_6=0$ est pair ,

♣ pour $a_i=6-i$, $\forall i=1,2,3,4,5,6$ on a $N_6=(6-1)(5-2)(4-3)(3-4)(2-5)(1-6)=-225$ est impair .

$\rightarrow$ pour $n=1$, on a forcément $a_1=1$ donc $N_1=0$.

2.Montrons que:

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-i^2}{i}\geqslant 0$$

✠ · · · ✠

On va montrer un $r$ésultat plus $g\acute{e}n$éral :

Lemme 1. (inégalité du $r$éarrangement)

Soit $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$ et $y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_n$ des $r$éels , Soit $(z_1,\ldots,z_n)$ une permutation de $(y_1,\ldots,y_n)$

Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

En d'autres termes : « la plus grande somme est atteinte lorsque les suites sont dans le $m$ême ordre. »

Démonstration :

Soit $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$ et $y_1\leqslant y_2\leqslant\ldots\leqslant y_n$ des $r$éels , Soit $(z_1,\ldots,z_n)$ une permutation de $(y_1,\ldots,y_n)$

Montrons que :

$$\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

Supposons dans un premier temps que les inégalit$\acute{e}s$ entre les x_i sont toutes stricts : $x_1>\cdots>x_n$

Si les z_i ne sont pas rangés en ordre croissant , c'est $-$ à $-$ dire si on peut trouver $i<j$ tel que $z_j<z_i$,

on a $(x_i-x_j)(z_j-z_i)>0$ donc $x_iz_i+x_jz_j>x_iz_j+x_jz_i$,

En d'autres termes , la valeur minimale de $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i$ est donc obtenue pour une permutation $(z_1,\ldots,z_n)$ telle que

$z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_n$, Auquel cas , on a $z_i=y_i$ $\forall i=1,\ldots,n$;

Dans le cas $général$, en regroupant les indices $1, \ldots, n$ en paquets $(1, \ldots, k_1), (k_1+1, \ldots, k_2), \ldots, (k_{p-1}, \ldots, k_p)$ avec $i_p = n$ tel que

$$x_1 = \cdots = x_{k_1} < x_{k_1+1} = \cdots = x_{k_2} < \cdots < x_{i_{p-1}+1} = \cdots = x_{i_p}$$

on peut classer les z_i par ordre croissant à l'intérieur de chaque paquet d'indices sans changer la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i z_i$

Si après ce $r$éarrangement les z_i ne sont pas globalement rangés par ordre croissant, alors si i et j sont tels que $i < j$ et $z_j < z_i$, alors les indices i et j n'appartiennent pas au $m$ême paquet et on a aussi $x_i > x_j$ On peut conclure comme dans le premier cas .

REMARQUE :

On peut $r$ééc rire l'inégalité du $r$éordonnement comme suit :

Soit $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ et $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$ des $r$éels , Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ une permutation de $(y_1, \ldots, y_n)$

Alors:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$$

✠ · · · ✠

En particulier pour $x_i = \frac{1}{i}$, $y_i = i^2$ et $z_i = -a_i^2 \, \forall i = 1, \ldots, n$, Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{i} \text{ , } d\text{'}o\grave{u} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - i^2}{i} \geqslant 0$$

En particulier , pour $n = 2017$.

Exercice 2.

Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Les points D, E et F sont respectivement, les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C

1.Montrer que $\angle \text{BAO} = \angle \text{DAC}$.

2.Montrer que les droites (OA) et (EF) sont perpendiculaires.

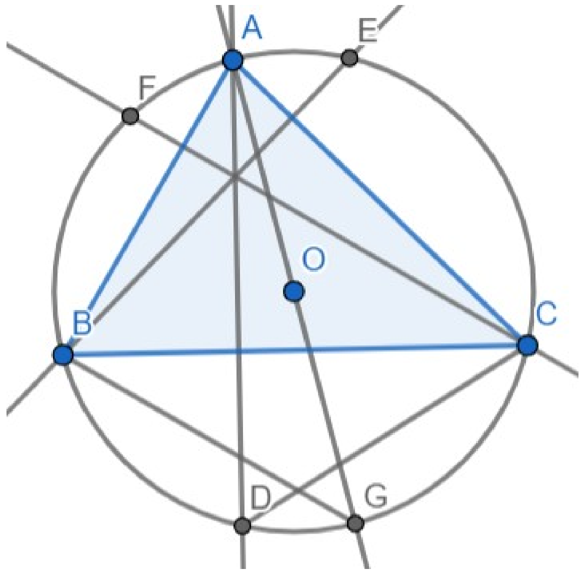
Solution.

1. Montrons que $\angle \text{BAO} = \angle \text{DAC}$.

MÉTHODE 1 :

On note G le point de l'intersection de la droite (AO) et le cercle circonscrit de ABC

Et H le point de l'intersection de (AD) et (BC)



Notons $\angle \text{BAO} = \theta$,

Dans le triangle ABG , on a : $\angle \text{BAO} + \angle \text{ABG} + \angle \text{BGA} = \pi$

Avec $\angle \text{ABG} = \frac{\pi}{2}$,donc $\angle \text{BGA} = \frac{\pi}{2} - \theta$

Dans le triangle AHC , on a : $\angle \text{AHC} + \angle \text{HCA} + \angle \text{CAH} = \pi$

Avec $\angle \text{AHC} = \frac{\pi}{2}$,donc $\angle \text{BGA} = \angle \text{HCA} = \frac{\pi}{2} - \theta$

Donc $\angle \text{DAC} = \angle \text{CAH} = \theta = \angle \text{BAO}$

D'où le résultat.

Méthode 2 :(Analyse géométrique)

On muni le plan par le repère orthogonal euclidien $\left(B, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\vec{\text{BC}} = \vec{i}$ et $\vec{\text{BA}} \times \vec{J} > 0$

on a $B(0,0)$, $C(1,0)$ et on note $A(x_A, y_A)$

Notons $O(x_O, y_O)$ le centre de le cercle circonscrit de ABC ,

On a $x_O = \frac{1}{2}$,

Notons $(\triangle_1)$ le droite qui passe par B et A et $(\triangle_2)$ le droite perpendiculaire à $(\triangle_1)$ qui passe par O ,

On a l'équation cartésienne de $(\triangle_1)$: $y = \frac{y_A}{x_A} x$

et $(\triangle_2)$: $y = -\frac{x_A}{y_A}\left(x - \frac{x_A}{2}\right) + \frac{y_A}{2}$

Donc $y_O = \frac{1}{2}\left[y_A - \frac{x_A}{y_A}(1 - x_A)\right]$

Ainsi le rayon du cercle circonscrit de ABC est :

$$R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left[y_A - \frac{x_A}{y_A}(1 - x_A)\right]^2}$$

Notons $H(x_H, y_H)$ le point de l'intersection de (BC) et (AD)

On a $x_H = x_A$ et y_H=0

On a $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_A\left(x_A - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}y_A\left[y_A + \frac{x_A}{y_A}(1 - x_A)\right] = \frac{1}{2}x_A^2 + \frac{1}{2}y_A^2$

Et $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = y_A^2$

Donc $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| \times \overrightarrow{\mathrm{BA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}} = y_A\sqrt{(1 - x_A)^2 + y_A^2}\left(\frac{1}{2}x_A^2 + \frac{1}{2}y_A^2\right)$

Et $\left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\| \times \overrightarrow{\mathrm{AH}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\| \times y_A^2$

Avec $\left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{BO}}\right\| = \sqrt{x_O^2 + y_O^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left[y_A - \frac{x_A}{y_A}(1 - x_A)\right]^2}$

Donc $\left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\| \times \overrightarrow{\mathrm{AH}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \times \sqrt{1 + \left[y_A - \frac{x_A}{y_A}(1 - x_A)\right]^2} \times y_A^2$

Or $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\| \times \overrightarrow{\mathrm{AH}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| \times \overrightarrow{\mathrm{BA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \times \sqrt{1 + \left[y_A - \frac{x_A}{y_A}(1 - x_A)\right]^2} \times y_A^2}{y_A\sqrt{(1 - x_A)^2 + y_A^2}\left(\frac{1}{2}x_A^2 + \frac{1}{2}y_A^2\right)} = \dfrac{\sqrt{1 + \left[y_A - \frac{x_A}{y_A}(1 - x_A)\right]^2} \times y_A}{\sqrt{(1 - x_A)^2 + y_A^2}\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = 1$

Ainsi

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AH}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\|}$$

Par suite :

$$\cos(\angle\mathrm{BAO}) = \cos(\angle\mathrm{DAC})$$

D'où $\angle\mathrm{BAO} = \angle\mathrm{DAC}$

2.Montrons que les droites (OA) et (EF) sont perpendiculaires

On a EO = FO,donc O appartient au médiatrice du segment [EF],donc pour montrer que les droites (OA) et (EF) sont perpendiculaires , il suffit de montrer que A appartient au médiatrice du segment [EF].

On note $\theta = \angle\mathrm{BAC}$

On a alors $\angle\mathrm{ABF} = \frac{\pi}{2} - \theta$ et $\angle\mathrm{ECA}$=$\frac{\pi}{2}$-ϑ

Avec E, A et F sont des points du cercle cercle circonscrit de ABC , et O le centre de ce cercle .

Alors EA = AF,donc A appartient au médiatrice du segment [EF].

D'où le résultat.

REMARQUE:

On peut procéder comme dans la méthode 2 de la question 1 et montrer que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{EF}} = 0$

Exercice 3.

On colorie les points du plan par deux couleurs différentes

Montrer qu'on peut trouver 2017 bipoints (A_i, B_i) $i = 1, \ldots, 2017$, vérifiant les deux conditions suivantes

1.Les points A_i et B_i ont la même couleur , pour tout $i = 1, \ldots, 2017$;

2.La distance entre A_i et B_i est égale à 1, pour tout $i = 1, \ldots, 2017$.

Solution.

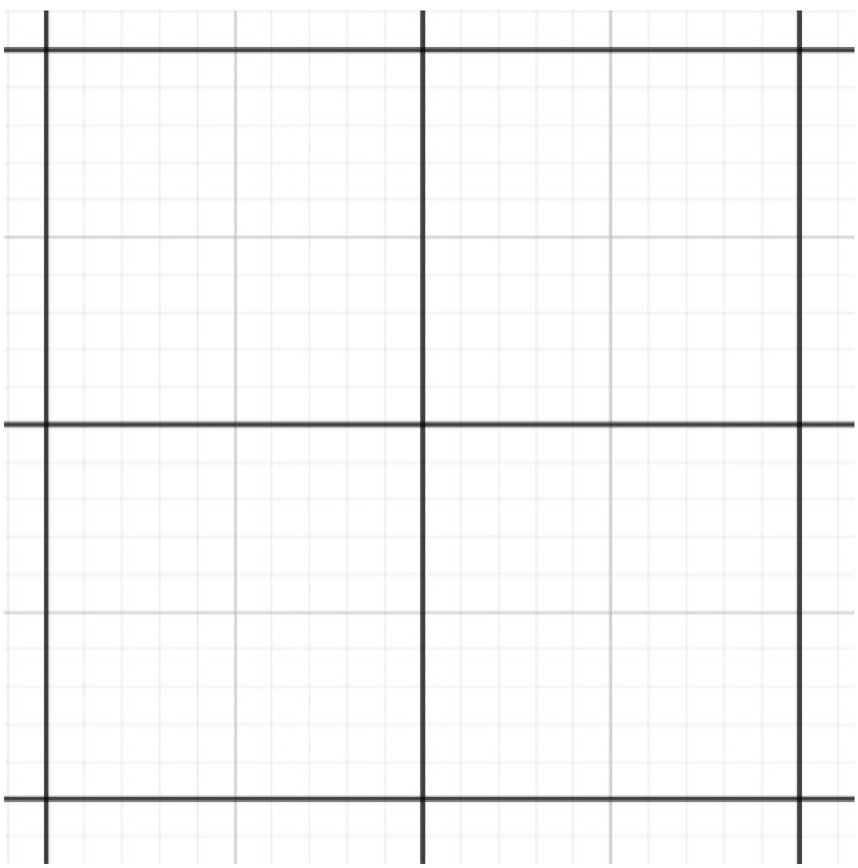
il s'agit d'un exercice facile de la théorie de la géomértie du pixels .

on va montrer du'il existe une infinité de bipoints $(A_i, B_i), i \in \mathbb{N}$ vérifiant

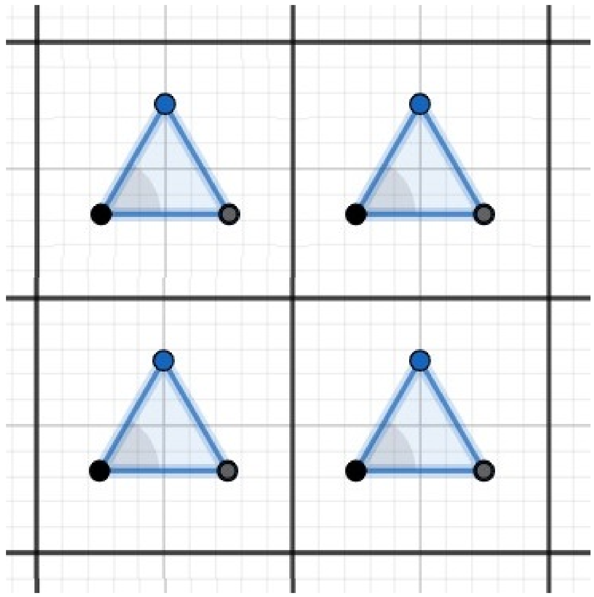
1.Les points A_i et B_i ont la même couleur , pour tout $i \in \mathbb{N}$;

2.La distance entre A_i et B_i est égale à 1, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

En effet ,en découpe le plan en une infinité de carrés de coté égal à 2 ,comme le montre la figure ci-dessous



pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,on prend le grand carré de côté $4n^2$ qui contient n^2 carrés de côté égal à 2 , pour tout carré , puisque le rayon de le cercle circonscrit d'un triangle équilatéral est $\frac{2}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$ Donc il existe un triangle équilatéral d'un mètre de côté, inclus dans le carré. D'après le principe des tiroirs, parmi les trois sommets, il y en a deux qui sont d'une même couleur.



On note (A_i, B_i) les deux points du triangle qui ont la même couleur pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

D'où le résultat .